



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIÓN

Titulación :

INGENIERO INDUSTRIAL

Título del proyecto:

DESARROLLO DE SOFTWARE PARA CÁLCULO A
FATIGA DE EJES SEGÚN MODELOS S-N Y ϵ -N

- MEMORIA -

Alumno: Calvo Fabo, Mikel

Tutor: García Zabalegui, Francisco Javier

Pamplona, Julio de 2012

Agradecimientos

Una vez alguien me dijo que los peces no tienen memoria, que en apenas unos segundos olvidan lo que han vivido momentos antes. Nuestra memoria me recuerda a menudo a la de los peces. Por ello, antes de olvidarme, no quiero dejar pasar la oportunidad de mostrarme ciertamente agradecido con determinadas personas. Y es que, últimamente me veo como una pieza más dentro de este mundo caótico que camina en una dirección, rodeada eso sí, por muchas más piezas con las he formado un cierto mecanismo y que me han acompañado hasta escribir estas líneas.

Primeramente, quisiera dar las gracias a mi familia, quienes a lo largo de mi vida han velado por mi bienestar y educación siendo mi apoyo en todo momento y depositando su entera confianza en cada reto que se me presentaba sin dudar ni un solo momento de mi capacidad. Es por ellos que soy lo que soy ahora.

Quiero dar las gracias también a Patxi García por haberme dirigido en este proyecto de fin de carrera. Por todas las atenciones y por el tiempo que ha perdido conmigo.

Gracias también a todos los profesores que a lo largo de mi vida despertaron en mí el interés por la ingeniería y las matemáticas, que aunque no les mencione de forma directa a cada uno de ellos (porque seguramente serán muchos), no les puedo negar un sincero agradecimiento.

Y finalmente también, por qué no, agradecer a todas aquellas personas del pasado, algunas seguramente ya olvidadas que, de una u otra manera y quizá sin saberlo, han puesto de su parte para que yo pueda llegar hasta aquí.

Mikel Calvo Fabo

“Las batallas las ganan soldados cansados”

Napoleón

ÍNDICE

1.1. Resumen.....	1
1.2. Introducción.....	2
1.3. Hiperestaticidad.....	4
1.3.1. Teorías para resolver la hiperestaticidad.....	4
1.3.2. Ecuación de los 3 momentos.....	7
1.4. Métodos Numéricos.....	11
1.4.1. Sistemas de ecuaciones lineales.....	11
1.4.2. Ecuaciones no lineales.....	15
1.5. Fatiga.....	17
1.5.1. Estadios de fatiga.....	18
1.5.2. Teorías de fatiga.....	20
1.5.3. Factores que afectan a la resistencia a la fatiga.....	22
1.5.4. Naturaleza estadística de la fatiga.....	29
1.6. Reseña Histórica.....	31
1.7. Teorías Utilizadas.....	34
1.7.1. Curvas S-N.....	34
1.7.1.1. Determinación de las curvas S-N.....	34
1.7.1.2. El límite de fatiga.....	36
1.7.1.3. Expresión analítica de las curvas S-N.....	37
1.7.1.4. Factores modificadores.....	38
1.7.1.5. Líneas de fallo.....	45
1.7.1.6. Campo de utilización de las curvas S-N.....	51
1.7.2. Curvas ϵ -N.....	51
1.7.2.1. Comportamiento cíclico uniaxial.....	51
1.7.2.1.1. Control por tensión y control por deformación.....	52
1.7.2.1.2. Características del comportamiento cíclico.....	52
1.7.2.1.3. La curva cíclica.....	53
1.7.2.1.4. Relaciones cíclicas tensión-deformación.....	54
1.7.2.2. Determinación de las curvas ϵ -N.....	55
1.7.2.3. Expresión analítica de las curvas ϵ -N.....	56
1.7.2.4. La vida de transición.....	57
1.7.2.5. Determinación de las constantes de fatiga.....	58
1.7.2.6. Otras ecuaciones.....	59
1.7.2.7. Campo de utilización de las curvas ϵ -N.....	60
1.8. Guía de Usuario.....	62
1.9. Coeficiente de Seguridad.....	73
1.10. Resultados y Conclusiones.....	76
1.11. Bibliografía.....	78

1.1. RESUMEN

Fatiga y fractura son fenómenos que despiertan un creciente interés, sobre todo como consecuencia de la presión económica existente por obtener componentes y estructuras cada vez más eficientes. Las piezas y/o componentes sometidos a cargas variables deben ser capaces de aguantar un número de ciclos preestablecido por un buen diseño a fatiga.

El objetivo de este proyecto es crear un programa informático que sirva de soporte y ayuda en el diseño de ejes, tanto estáticos como hiperestáticos, a fatiga. El interés de hallar una solución a este caso estriba en que, si bien la solución manual de un caso estático es relativamente sencillo, se complica extraordinariamente cuando se contempla un caso hiperestático, como puede darse el caso en algunos ejes. Se pretende, por tanto, con la ayuda de medios informáticos, hallar una solución rápida y precisa de las solicitudes de un eje, eliminando la lentitud y las posibilidades de error que una solución manual conlleva. Obtenidas las solicitudes del eje, se abordará el problema de la fatiga.

Los estudios sobre fatiga cada vez han sido más frecuentes y existen varias teorías. Este PFC se apoyará en 2 de esas teorías: por un lado en las curvas tensión-vida (S-N), y por otro en las curvas deformación-vida (ϵ -N).

Se ha creado una pequeña librería de materiales con sus respectivas características, a la que el usuario tendrá acceso desde el mismo programa, y a la que también podrá añadir nuevos materiales así como modificar los ya existentes en ella.

Se ha decidido no considerar todos los problemas que puede presentar un eje, ya que eso alargaría y complicaría excesivamente la resolución del PFC. Sin embargo, esto no quita que el software dé solución a infinidad de casos y, por otra parte pueda servir como base para posteriores mejoras que tengan en cuenta un mayor número de singularidades. Se contemplan tanto ejes estáticos como hiperestáticos, macizos o huecos; sin embargo, no se contempla la solución del problema para ejes nervados ni ejes con secciones cónicas.

En cuanto al tipo de carga que soportará el eje serán las producidas por los elementos de transmisión propios del mismo: poleas y/o engranajes.

El lenguaje escogido para llevar a cabo este PFC ha sido Visual Basic 6.0. Conviene recordar que se trata de un proyecto de ámbito mecánico y no de un proyecto informático. Por ello, en los documentos que acompañan a este proyecto no se entrará a valorar tanto cuestiones propias a la informática, como aspectos propios de mecánica.

Con todo ello se espera haber ofrecido una panorámica suficiente para permitir un buen diseño a fatiga apoyado en este programa, sin olvidar la importancia o necesidad en muchos casos de llevar a cabo ensayos prácticos del comportamiento en servicio real.

Los documentos que forman parte de este proyecto son la presente memoria, a la cual acompañan unos anexos, y un apartado de cálculos para apoyar las conclusiones del mismo.

1.2. INTRODUCCIÓN

La mayor parte de componentes y estructuras reales están sometidos a cargas que varían a lo largo del tiempo. Es un hecho conocido desde hace más de un siglo que la carga necesaria para producir el fallo bajo condiciones de carga repetitivas es muy inferior a la que produciría la rotura estática. A este fenómeno se le denomina "fatiga".

Pese a diseñarse estas piezas por debajo de su límite elástico, con un número suficiente de ciclos, las piezas rompen. El 90% de las piezas que se rompen en servicio fallan debido a la fatiga.

Las roturas por fatiga son especialmente peligrosas porque no suelen presentar indicios de fallo inminente, sino que éste se produce de modo repentino y sin que se observen deformaciones plásticas de conjunto. Generalmente se originan en alguna discontinuidad geométrica como cambios de sección, agujeros, etc. Dichas discontinuidades afectan poco desde el punto de vista de resistencia estática, pero son fatales desde el punto de vista de la resistencia a fatiga. Por otra parte, en la resistencia a fatiga pueden intervenir de forma significativa, además de la geometría, el material y las cargas, otros factores cuyo efecto es difícilmente cuantificable como son la corrosión, el frotamiento, el propio proceso de fabricación, etc., constituyendo en su conjunto un problema multidisciplinar.

Por otra parte, el mercado actual es cada vez más exigente en los plazos y costos de desarrollo. En este contexto resulta indispensable disponer y utilizar cuantas herramientas existan para conseguir el objetivo de aumentar los niveles de calidad sin sacrificar costes ni plazos.

Sin embargo, es muy común que los programas de ingeniería que circulan en el mercado sean muy completos; demasiado en la mayoría de los casos y, por lo tanto, bastante caros. Es muy difícil encontrar un programa específico para una tarea en concreto. Por este motivo se ha decidido llevar a cabo este proyecto y desarrollar un software que ayude con una cuestión tan trascendental dentro del mundo de la ingeniería como es el cálculo de la resistencia a fatiga de un eje.

Debido a la exigencia antes mencionada está tomando tanta importancia la simulación de fenómenos físicos, como por ejemplo mediante el método de los elementos finitos. Desafortunadamente, la variedad de los factores que intervienen en el fenómeno de la fatiga, así como su propia complejidad, hacen que una valoración puramente calculística resulte insuficiente, siendo necesario combinarla con métodos experimentales. Según Shigley *"siempre es buena práctica en ingeniería elaborar un programa de ensayos, de hecho esto es un requisito y no una opción para prevenir la posibilidad de una falla por fatiga"*. A pesar de ello la realización de estimaciones y cálculos, en general previos a los ensayos, resulta indispensable para, como prosigue Shigley *"saber por qué ocurren los fallos por fatiga, a fin de poder emplear los métodos más adecuados para mejorar la resistencia"*.

Un último factor esencial que justifica ampliamente la realización de cálculos de fatiga es la posibilidad de reducir al mínimo el número y complejidad de los ensayos a realizar para garantizar una solución óptima. Los ensayos de fatiga suelen ser largos, complicados y frecuentemente precisan la realización de un número suficiente de repeticiones como

para poder darles un sentido estadístico. Todo ello supone costes y plazos que fácilmente se elevan más allá de lo admisible si no se intenta aplicar todos los pedios posibles para alcanzar el resultado correcto al primer intento.

Hay que tener en cuenta que los cálculos de fatiga son sólo aproximados. Sin embargo, y a pesar de ello, deben conducir a estimaciones del comportamiento real si no va a ser posible realizar ensayos y, en el caso más que deseable de que éstos se realicen, el cálculo debe ser suficientemente correcto como para poder minimizar realmente su número.

Este PFC puede tomarse como una herramienta para realizar predicciones acerca de la vida a fatiga de ejes sometidos a un estado de sollicitación de complejidad equivalente a la real.

En rigor debería hablarse de estimaciones de vida, más que de predicciones, dado el elevado grado de incertidumbre al que están sometidos los resultados. No hay que olvidar el carácter estadístico del fenómeno de la fatiga a fin de dar a dichos resultados el valor que realmente tienen en cada caso.

Con lo expuesto en este proyecto se dispone de las herramientas necesarias para realizar predicciones acerca de la vida a fatiga de ejes sometidos a un estado de sollicitación de complejidad equivalente a la real.

1.3. HIPERESTATICIDAD

En las estructuras hiperestáticas solicitadas a flexión, las ecuaciones de la estática son insuficientes para resolver su hiperestaticidad siendo necesario establecer ecuaciones adicionales. Esto sucede cuando el número de incógnitas es superior a las ecuaciones de la estática. Las ecuaciones adicionales (o ecuaciones de deformación) se obtienen utilizando métodos de cálculo de deformaciones a flexión.

En el presente apartado nos basaremos en la flexión hiperestática de vigas de dos o más tramos, o vigas continuas, para posteriormente concretar el análisis del mismo problema en ejes de dos o más tramos, o ejes hiperestáticos.

El grado de hiperestaticidad de una viga es igual a la diferencia entre el número de incógnitas de sus reacciones externas y el de ecuaciones de la estática. Para resolver su hiperestaticidad es preciso establecer un número de ecuaciones de deformación igual al grado de hiperestaticidad de la viga. Para ello, se transforma la viga hiperestática en una viga isostática equivalente, liberándola de sus ligaduras superabundantes y sustituyendo su acción por fuerzas y pares. Las magnitudes de estas fuerzas y pares han de ser tales que la viga isostática equivalente conserve las coacciones que las ligaduras suprimidas ejercían sobre la viga hiperestática.

1.3.1. Teorías para resolver la hiperestaticidad

Como ya ha sido mencionado, los métodos para resolver la hiperestaticidad consisten en introducir tantas ecuaciones de deformación como el grado de hiperestaticidad de la viga. Existen varias teorías para vigas de un solo tramo.

- Ecuación diferencial de la elástica

En una viga solicitada a flexión, las diferentes secciones transversales experimentan giros y, como consecuencia de esos giros, las fibras longitudinales se curvan con el fin de mantener su ortogonalidad respecto a las secciones transversales giradas. Como una fibra más, el eje de la viga, inicialmente recto, se transforma en la elástica, o lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones transversales de la viga deformada.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z}$$

Esta ecuación representa la ecuación diferencial aproximada de la elástica de una viga, cuya aplicación puede darse a toda clase de vigas salvo aquellas que por su esbeltez tienen grandes deformaciones.

- Ecuación universal de la elástica

Si nos basamos en la ecuación anterior y consideramos una viga cualquiera sometida a diferentes tipos de cargas, a cada tramo de viga comprendido entre

cargas le corresponde una ley de variación de momentos flectores y, por consiguiente, una ecuación diferencial de la elástica diferente.

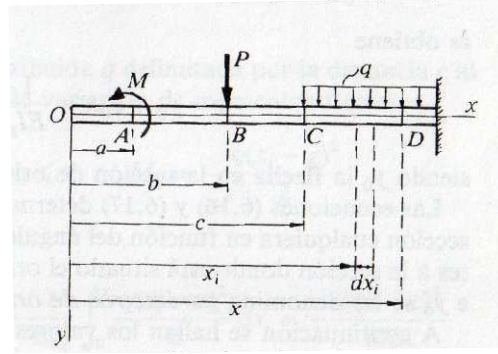


Figura 1.1

Integrando y hallando las correspondientes constantes de integración:

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{EI_z} \sum M(x-a) + \frac{1}{2EI_z} \sum P(x-b)^2 + \frac{1}{6EI_z} \sum q(x-c)^3$$

$$y = y_0 + \theta_0 x + \frac{1}{2EI_z} \sum M(x-a)^2 + \frac{1}{6EI_z} \sum P(x-b)^3 + \frac{1}{24EI_z} \sum q(x-c)^4$$

- Teoremas de Mohr

La expresión analítica del primer teorema de Mohr determina el giro relativo de dos secciones transversales de la viga.

$$\theta_{A,B} = \theta_A - \theta_B = \int_A^B \frac{M_z dx}{EI_z}$$

En el caso particular de que la rigidez de la viga sea constante en el tramo AB, la expresión anterior se reduce a:

$$\theta_{A,B} = \theta_A - \theta_B = \frac{\int_A^B M_z dx}{EI_z} = \frac{S^{M_{A,B}}}{EI_z}$$

En este caso particular, el ángulo $\theta_{A,B}$ que forman entre sí las tangentes en dos puntos A y B de la elástica es igual al área del diagrama de momentos flectores comprendido entre A y B, $S^{M_{A,B}}$, dividido por la rigidez EI_z .

La expresión analítica del segundo teorema de Mohr determina la flecha de un punto de la viga respecto de otro.

$$\delta_{B,A} = \overline{BB'} = \int_A^B \frac{M_z x_B}{EI_z} dx$$

Si la rigidez de la viga es constante en el tramo AB, la expresión anterior se reduce a:

$$\delta_{B,A} = \overline{BB'} = \frac{\int_A^B M_z x_B dx}{EI_z} = \frac{Q_B^{M_{A,B}}}{EI_z}$$

En este caso particular de viga de rigidez constante, la ordenada $\delta_{B,A}$ del punto B respecto a la tangente en A es igual al momento estático respecto a y_B del diagrama de momentos flectores comprendido entre A y B, $Q_B^{M_{A,B}}$, dividido por la rigidez EI_z .

- Método de la viga conjugada

Se denomina viga conjugada de la viga considerada, a la misma viga sometida a un diagrama ficticio de cargas distribuidas igual al diagrama de momentos flectores, de tal forma que cuando el momento flector sea positivo la carga ficticia de la viga conjugada esté dirigida hacia abajo, y cuando el momento flector sea negativo la carga ficticia esté dirigida hacia arriba.

Existe una correspondencia entre las deformaciones de la viga principal y las solicitaciones de la viga conjugada.

$$\theta_C = \frac{T'_C}{EI_z}$$

El ángulo girado θ_C por una sección cualquiera C de la viga principal es igual a la fuerza cortante T'_C de la viga conjugada en la misma sección, dividida por la rigidez de la viga principal.

En el caso de la deformada:

$$\delta_C = \frac{M'_C}{EI_z}$$

La flecha δ_C en una sección cualquiera C de la viga principal es igual al momento flector M'_C de la viga conjugada en la misma sección, dividido por la rigidez de la viga principal.

Estas expresiones permiten establecer, entre los enlaces y las condiciones en los extremos de las vigas principal y conjugada, la siguiente correspondencia:

- A un apoyo en el extremo de la viga principal ($\theta_C \neq 0, \delta_C = 0$) le corresponde un apoyo en el extremo de la viga conjugada ($T'_C \neq 0, M'_C = 0$).

- A un apoyo intermedio de la viga principal ($\theta_{C1} \neq \theta_{C2}, \delta_C = 0$) le corresponde una articulación intermedia en la viga conjugada ($T'_{C1} \neq T'_{C2}, M'_C = 0$).
- Al extremo libre de un voladizo de la viga principal ($\theta_C \neq 0, \delta_C \neq 0$) le corresponde un extremo empotrado en la viga conjugada ($T'_C \neq 0, M'_C \neq 0$).
- A una articulación intermedia de la viga principal ($\theta_{C1} \neq \theta_{C2}, \delta_C \neq 0$) le corresponde un apoyo intermedio en la viga conjugada ($T'_{C1} \neq T'_{C2}, M'_C \neq 0$).

1.3.2. Ecuación de los tres momentos

Los métodos del apartado anterior se suelen emplear para vigas de un sólo tramo, donde la hiperestaticidad puede aparecer debido a uno o varios empotramientos. Sin embargo, este proyecto centra su atención en ejes sometidos, al igual que las vigas consideradas, a flexión. La diferencia consiste en que un eje con un tramo (dos apoyos) nunca será hiperestático, puesto que jamás estará empotrado. No obstante, los ejes con más de un tramo (o más de dos apoyos) que serán ejes hiperestáticos los podremos asemejar a vigas continuas, las cuales no son sino vigas simplemente apoyadas en más de dos apoyos.

En resumen, es posible encontrar ejes de más de dos apoyos y, por tanto, hiperestáticos, en cuyo caso, antes de hablar de fatiga propiamente dicha, habrá que resolver la hiperestaticidad.

La ecuación de los tres momentos fue desarrollada por Clapeyron para el cálculo de las vigas continuas, siendo un método muy operativo e interesante por la forma de aplicación del principio de superposición, así como por la introducción de las condiciones de continuidad en la tangente de la elástica.

Cuando se trabaja con vigas con más de un tramo, las reacciones no pueden ser calculadas estáticamente. Una forma de resolverlas es aplicando el teorema de los tres momentos, el cual también puede ser utilizado para resolver vigas de un solo tramo.

Consideremos, pues, una viga continua que tiene m apoyos, de los cuales 1 es fijo y los restantes $m - 1$ móviles. El grado de hiperestaticidad de esta viga es $m - 2$, ya que las incógnitas de sus reacciones externas son $2 + m - 1 = m + 1$ y las ecuaciones de la estática son 3. Elijiendo como reacciones hiperestáticas las reacciones de los $m - 2$ apoyos intermedios, sus magnitudes han de ser tales que las flechas de sus puntos de aplicación sean nulas; es decir:

$$\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{m-2} = 0$$

Estas ecuaciones de deformación constituyen un sistema de $m - 2$ ecuaciones con $m - 2$ incógnitas. La resolución del sistema de ecuaciones se simplifica considerablemente, tomando como reacciones hiperestáticas los momentos flectores M_1, M_2, \dots, M_{m-2} que actúan en las secciones transversales correspondientes a los apoyos intermedios. El sistema isostático equivalente estará formado por $m - 1$ vigas

simplemente apoyadas, en cuyos extremos actúan los pares M_1, M_2, \dots, M_{m-2} sustituyendo las acciones de las ligaduras entre tramos contiguos. Las magnitudes de estos pares han de ser tales que sean iguales los ángulos girados por las secciones contiguas de estas vigas simplemente apoyadas, lo que da lugar a $m - 2$ ecuaciones de deformación de la forma:

$$\theta_{n,1} = \theta_{n,2}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\theta_c = \frac{T'_c}{EI_z}$$

siendo T'_c la fuerza cortante en la sección C de la viga conjugada y θ_c el ángulo girado por la misma. Se recuerda que se denomina viga conjugada de una viga considerada, a la misma viga sometida a un diagrama ficticio de cargas distribuidas igual al diagrama de momentos flectores, de tal forma que cuando el momento flector sea positivo la carga ficticia esté dirigida hacia abajo, y cuando el momento flector sea negativo la carga ficticia esté dirigida hacia arriba. Por tanto la anterior igualdad equivale a:

$$\frac{T'_{n,1}}{EI_n} = \frac{T'_{n,2}}{EI_{n+1}}$$

siendo, en este caso, las fuerzas cortantes en el apoyo n de las vigas conjugadas de las vigas simplemente apoyadas correspondientes a los tramos n y $n + 1$. Asimismo, I_n e I_{n+1} representan los momentos de inercia de los tramos n y $n + 1$ de la viga continua.

El diagrama de carga de cada una de estas vigas conjugadas se compone de los diagramas triangulares, correspondientes a los pares extremos, y del diagrama de momentos flectores originado por las cargas directamente aplicadas al tramo considerado. El área de este último diagrama para el tramo n se designa A_n y su centro de gravedad G_n está definido por las distancias a_n y b_n .

Del equilibrio de la viga conjugada n se deduce:

$$T'_{n,1}L_n + A_n a_n + \frac{M_n L_n}{2} \frac{2}{3} L_n + \frac{M_{n-1} L_n}{2} \frac{L_n}{3} = 0$$

de donde

$$T'_{n,1} = -\frac{A_n a_n}{L_n} - \frac{M_n L_n}{3} - \frac{M_{n-1} L_n}{6}$$

Análogamente, del equilibrio de la viga conjugada $n + 1$:

$$T'_{n,2} = -\frac{A_{n+1} a_{n+1}}{L_{n+1}} - \frac{M_n L_{n+1}}{3} - \frac{M_{n+1} L_{n+1}}{6}$$

Sustituyendo $T'_{n,1}$ y $T'_{n,2}$ en la expresión, se obtiene la ecuación de los tres momentos:

$$M_{n-1} \frac{L_n}{I_n} + 2M_n \left(\frac{L_n}{I_n} + \frac{L_{n+1}}{I_{n+1}} \right) M_{n+1} L_{n+1} + M_{n+1} \frac{L_{n+1}}{I_{n+1}} = -\frac{6A_n a_n}{L_n I_n} - \frac{6A_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1} I_{n+1}}$$

Estableciendo esta ecuación para cada uno de los $m - 2$ apoyos intermedios se obtiene un sistema de $m - 2$ ecuaciones que permite hallar los $m - 2$ momentos flectores hiperestáticos. La ventaja de este método de resolución consiste en que en el sistema de ecuaciones ahora obtenido cada ecuación tiene un máximo de 3 incógnitas.

Si la viga continua es de sección constante, la ecuación anterior se reduce a:

$$M_{n-1} L_n + 2M_n (L_n + L_{n+1}) + M_{n+1} L_{n+1} = -\frac{6A_n a_n}{L_n} - \frac{6A_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}}$$

No obstante, un eje, rara vez va a ser de sección constante, en cuyo caso, como se acaba de ver se anulan los momentos de inercia y los valores de los momentos en los apoyos no dependen de las dimensiones transversales. Como lo más normal es que el eje tenga saltos de sección, se multiplica la ecuación anterior por un momento de inercia constante arbitrario I_0 , que por lo general se designa al momento de inercia de la sección transversal en uno de los tramos, y se introducen las siguientes notaciones:

$$L_n \frac{I_0}{I_n} = L'_n$$

$$L_{n+1} \frac{I_0}{I_{n+1}} = L'_{n+1}$$

$$A_n \frac{I_0}{I_n} = A'_n$$

$$A_{n+1} \frac{I_0}{I_{n+1}} = A'_{n+1}$$

De este modo la ecuación se transforma en:

$$M_{n-1} L'_n + 2M_n (L'_n + L'_{n+1}) + M_{n+1} L'_{n+1} = -\frac{6A'_n a_n}{L_n} - \frac{6A'_{n+1} b_{n+1}}{L_{n+1}}$$

Esta ecuación no contiene explícitamente momentos de inercia y el problema se reduce al de una viga de sección transversal uniforme para la que se calculan las longitudes modificadas de los tramos L'_1, L'_2, \dots y las áreas de momentos modificadas A'_1, A'_2, \dots

De esta manera se obtiene un sistema de ecuaciones compatible y determinado, es decir, que tiene las mismas incógnitas que ecuaciones, y el número de ecuaciones será igual al de apoyos intermedios que tenga el eje. Si el número de apoyos es de 3 quedará una sola ecuación y, por tanto, una sola incógnita. En el caso de que el

número de apoyos sea superior a 3 se ha empleado el método de resolución de sistemas de ecuaciones planteado por Gauss explicado más adelante.

1.4. MÉTODOS NUMÉRICOS

Los métodos numéricos son técnicas de análisis mediante las cuales es posible formular problemas de tal manera que se puedan resolver utilizando operaciones aritméticas. Estas técnicas son utilizadas para resolver ajustes de curvas, sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones no lineales, integración, ecuaciones diferenciales...

1.4.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Como ya se ha mencionado, el método de los tres momentos, empleado para resolver la hiperestaticidad de los ejes, proporciona un sistema de ecuaciones, que no es sino un conjunto de ecuaciones lineales que podemos escribir de forma tradicional así:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \end{cases}$$

Un sistema así expresado tiene m ecuaciones y n incógnitas, donde a_{ij} son números reales, llamados coeficientes del sistema; los valores b_m son números reales, llamados términos independientes del sistema; las incógnitas x_j son las variables del sistema y la solución es un conjunto ordenado de números reales (s_1, s_2, \dots, s_n) tales que al sustituir las incógnitas (x_1, x_2, \dots, x_n) por los valores (s_1, s_2, \dots, s_n) se verifican a la vez las m ecuaciones del sistema.

Este mismo sistema de ecuaciones lineales puede escribirse en notación matricial adquiriendo la forma siguiente:

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde:

- Se conoce como matriz del sistema a la matriz de dimensión $m \times n$ formada por los coeficientes del sistema, y designada por A .
- Se denota por X a la matriz columna formada por las incógnitas.
- Se designa por B a la matriz columna formada por los términos independientes.

Por otra parte, y como ya fue mencionado, la ecuación de los tres momentos nos proporciona un sistema compatible determinado, por lo que, siguiendo esta notación $m = n$, y a su vez es igual al número de apoyos intermedios que tenga el eje.

La matriz de coeficientes que devolverá la ecuación de los tres momentos será una matriz tridiagonal, tal que así:

$$\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_{32} & N_{33} & N_{34} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & N_{43} & N_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{n,n-1} & N_{nn} \end{pmatrix}$$

También podríamos definir esta matriz como una matriz sparse (dispersa). Se llama matriz sparse a una matriz donde la mayoría de sus elementos son cero. Por tanto, en el problema que nos atañe, cuantos más apoyos intermedios se tengan, la matriz de coeficientes será de mayor orden y el número de ceros de ésta aumentará.

Por otra parte, se dice que una matriz es dispersa cuando se puede hacer uso de técnicas especiales para sacar ventaja del gran número de elementos ceros que posee. Hay 2 tipos de matrices sparse:

- Matrices estructuradas. Los elementos no cero forman un patrón regular, por ejemplo, se agrupan a lo largo de un número pequeño de diagonales.
- Matrices no estructuradas. Los elementos no cero se distribuyen de forma irregular.

En el primer caso se pueden diseñar métodos basados en la estructura de las matrices, mientras que en el segundo caso sólo se puede hacer uso de la "dispersidad" de la matriz. Tal como se ha dicho, la matriz con la que se trabajará será una matriz tridiagonal, y por tanto, estructurada.

Cuando un sistema de ecuaciones lineales es de tamaño moderado, casi nadie duda en utilizar el método de Gauss en alguna de sus múltiples variantes (incluidas las descomposiciones matriciales). Sin embargo, la utilización de métodos iterativos se torna imprescindible en problemas con matrices grandes, especialmente si son sparse, donde el método de Gauss presenta las siguientes dificultades:

- Es caro: $4n^3/3$ operaciones.
- Es destructivo: retoca la matriz del sistema, y esto puede tener consecuencias muy poco deseables. Además, requiere guardar una copia de la matriz en muchas ocasiones.
- Para obtener una solución hace falta realizar todo el proceso, ya que en pasos intermedios no se dispone de ninguna aproximación de la solución.

Los métodos iterativos se introducen como un intento de salvar estas dificultades.

La ecuación de los tres momentos es un método que inicialmente se utiliza para vigas continuas, donde los apoyos intermedios pueden ser muchísimos y el sistema de ecuaciones tener muchas ecuaciones. En ese caso, no habría duda y resolveríamos el sistema mediante algún método iterativo, como puede ser el de relajación de Young o el de gradiente conjugado. Sin embargo, este proyecto centra su atención en ejes y con éstos, aun no teniendo un máximo de apoyos preestablecido, no daría lugar a un

sistema tan grande. Por tanto, se ha decidido utilizar el método de Gauss debido a su facilidad, ya que en estas dimensiones sus carencias no son tan significativas.

El método de Gauss, también conocido como resolución "por reducción", parte de un sistema con n incógnitas, y trata de obtener un sistema equivalente cuya primera ecuación tenga n incógnitas, la segunda $n - 1$, la tercera $n - 2$, y así sucesivamente hasta llegar a la última ecuación que tendrá una sola incógnita. Hecho esto, se resuelve la última ecuación, a continuación la penúltima, y así hasta llegar a la primera. Es decir, el método de Gauss consiste en triangular la matriz de coeficientes, haciendo cero los elementos que se encuentren por debajo de la diagonal principal.

Para hallar el diagrama de fuerzas cortantes calcularemos, primeramente, las reacciones de los apoyos de los ejes simplemente apoyados sometidos a las cargas correspondientes y a los pares aplicados en sus extremos, que se acaban de calcular, puesto que son las soluciones del sistema de ecuaciones. Se habla de ejes, en plural, puesto que se "separa" el eje en diferentes ejes, cogiendo dos apoyos consecutivos como extremos. En el primer y el último apoyo se obtendrá directamente la reacción. En los apoyos intermedios habrá que sumar la reacción correspondiente al eje de la "izquierda" con la de la "derecha" (Figura 1.2).

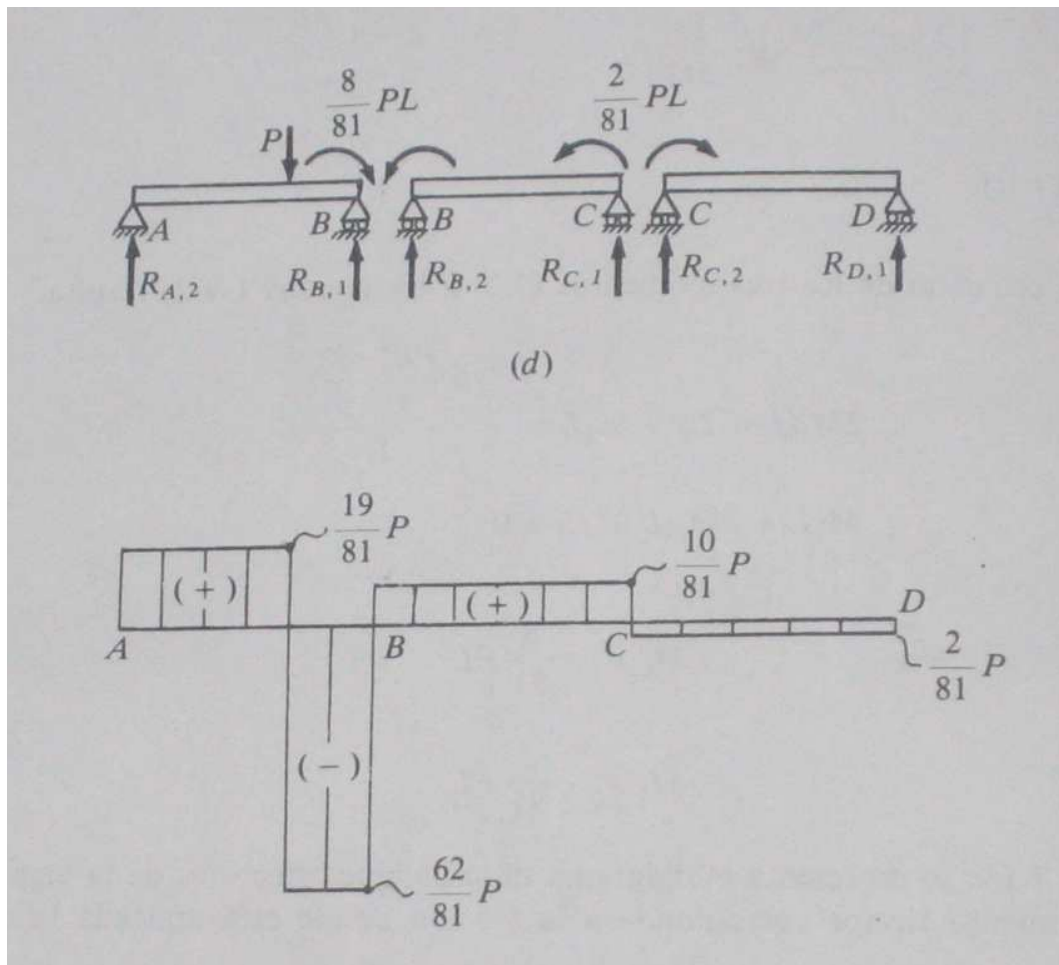


Figura 1.2

Una vez halladas las reacciones en los apoyos, la siguiente cuestión es la obtención del diagrama de esfuerzos cortantes. El convenio de signos positivos usados es el de la Figura 1.3, donde V es el esfuerzo cortante y M el momento flector.

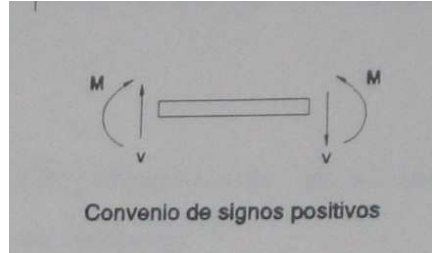


Figura 1.3

Para ilustrar mejor la obtención del diagrama de esfuerzos cortantes se seguirá un ejemplo sencillo (Figura 1.4).

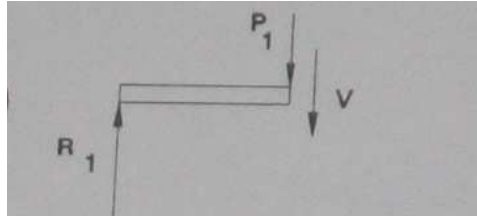


Figura 1.4

Se cortará la viga en cada punto de aplicación de una carga (P) o una reacción (R) y se colocará un esfuerzo cortante (T) según el convenio de signos citado anteriormente. A partir de ahí, utilizando la ecuación:

$$\sum F_{verticales} = 0$$

se obtendrá el valor del esfuerzo cortante en el lado derecho e izquierdo del punto de aplicación de la carga.

$$T_{derecha} = R_1$$

$$T_{izquierda} = R_1 - P_1$$

Entre carga y carga el esfuerzo cortante es constante puesto que no hay ninguna carga aplicada.

Después de hallado el diagrama de esfuerzos cortantes, el siguiente objetivo es la obtención del diagrama de momentos flectores. Se va a seguir el mismo ejemplo usado anteriormente (Figura 1.4), solo que ahora en lugar de V se tendría M. El convenio de signos vuelve a ser el mismo.

De esta forma, en cada punto de aplicación de una carga (P) o una reacción (R) se hallan los momentos flectores aplicando la ecuación:

$$\sum M = 0$$

Así, en para este caso el momento sería:

$$M = R_1x - P_1(x - xP_1)$$

El resultado nos da el momento flector en el punto x considerado. Obsérvese como la ecuación del momento flector, se corresponde con la ecuación de una recta ($y = ax + b$). Esto significa que entre los puntos de aplicación de las cargas el diagrama de momentos flectores será una recta.

Cuando existan cargas axiales, la obtención del momento varía un poco de lo expuesto hasta ahora. La ecuación se aplicará de igual manera y en los mismo puntos. Sin embargo, en este caso, en el punto de aplicación de la carga, una vez obtenido el momento para ese punto, habrá que sumarle el momento que produce la fuerza axial.

1.4.2. Ecuaciones no lineales

Son funciones que no cumplen con los criterios de linealidad. Funciones radicales, logarítmicas, exponenciales, trigonométricas... son algunos ejemplos de ecuaciones no lineales.

Para resolver este tipo de ecuaciones, existen varios métodos numéricos: bisección, regula falsi, punto fijo, Newton-Raphson, secante, ...

En los ámbitos de la ciencia y la ingeniería es común encontrarse con problemas en los que se requiera resolver ecuaciones no lineales que no se pueden resolver analíticamente o que resulta muy difícil. Para estos casos, es recomendable utilizar algún método numérico. En este proyecto nos hemos decantado por utilizar el de Newton-Raphson, que es uno de los más empleados en ingeniería por llegar al resultado del problema planteado de forma muy rápida.

La teoría $\varepsilon - N$ de la que hablaremos más adelante (ver apartado 1.7 del presente documento) nos proporciona una ecuación no lineal que habrá de ser resuelta de esta forma.

Este método se basa en trazar rectas tangentes que toman la forma de la función por medio de su primera derivada. Supóngase una función $f(x)$ a la que se desea calcular su raíz. Tomando un valor x_n cercano a la raíz en la función y trazando una recta tangente al punto $x_n, f(x_n)$ se obtiene un nuevo valor x_{n+1} que es mucho más cercano a la raíz que x_n . Se trata por tanto de un método iterativo.

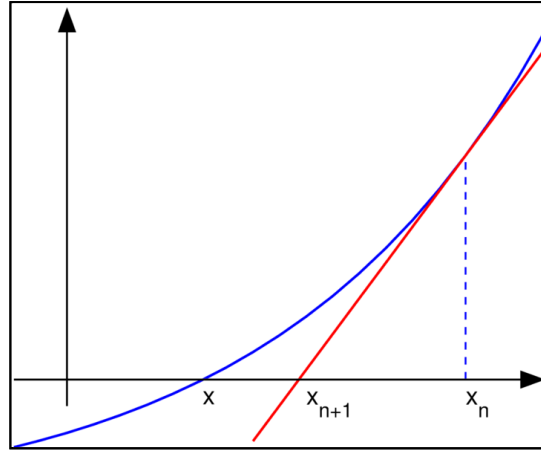


Figura 1.5

Para encontrar el valor de x_{n+1} , se tomará la ecuación de la recta:

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) = m(x_{n+1} - x_n)$$

Si aceptamos que x_{n+1} tiende a la raíz, necesariamente ha de cumplirse que $f(x_{n+1}) = 0$. Por otra parte, la pendiente de la recta es la derivada de la curva en ese punto. Por tanto:

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

Despejando x_{n+1} :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

El inconveniente principal de este método es que la derivada de la función en un punto sea cero, lo que daría pie a tener una división por cero que indeterminaría el método de Newton-Raphson. Afortunadamente, la ecuación a resolver no tendrá este inconveniente. En el apartado 1.7.2.3, podemos ver la forma que tomará esta curva y comprobar que no existen puntos críticos.

Para saber qué iteración proporciona una solución suficientemente buena basta con restar la solución de una iteración con la solución anterior y que el resultado sea menor que un error preestablecido, por ejemplo, 10^{-4} .

$$|x_i - x_{i-1}| \leq 10^{-4}$$

1.5. FATIGA

Muchos de los elementos de máquinas, tales como cigüeñales, árboles, ejes, bielas y resortes, son sometidos a cargas variables. El comportamiento de los materiales bajo este tipo de carga es diferente a aquel bajo cargas estáticas: mientras que una pieza soporta una gran carga estática, la misma puede fallar con una carga mucho menor si ésta se repite un gran número de veces. A este fenómeno se le denomina fatiga.

La fatiga, o deterioro progresivo por causa de sollicitaciones variables en el tiempo, y la fractura, o fallo como consecuencia de la interacción entre grietas preexistentes y las sollicitaciones aplicadas, son dos fenómenos de gran trascendencia práctica.

Los componentes y estructuras de ingeniería deben ser diseñados para poder soportar las sollicitaciones de servicio, de una forma segura y fiable, durante toda su vida útil. Al inicio de la vida del componente o estructura, la resistencia se corresponde con la resistencia de diseño y dicho valor debe ser superior al nivel de cargas extremas en un margen dado por el coeficiente de seguridad de diseño. A medida que la estructura o componente va siendo sometida a las condiciones de funcionamiento su resistencia intrínseca se va degradando por diversos motivos, uno de los más frecuentes es precisamente el fenómeno de la fatiga. Aunque pudiera ser debido también a otros factores como la corrosión, el desgaste...

La consideración de los fenómenos de fatiga y fractura desde esta perspectiva temporal permite una aproximación racional a la evaluación de la fiabilidad de los componentes y estructuras reales, entendida como la probabilidad de que puedan realizar su función sin fallo durante un período de tiempo dado.

Hasta el momento no se ha dado ninguna definición rigurosa del término fatiga. La ASTM la define del siguiente modo:

"La fatiga es el proceso de cambio estructural permanente, progresivo y localizado que ocurre en un material sujeto a tensiones y deformaciones variables, en algún punto o puntos y que produce grietas o la fractura completa tras un número suficiente de fluctuaciones"

Es interesante analizar esta definición con cierto detalle puesto que resalta las características más prominentes del fenómeno. En primer lugar se define como un proceso de cambio estructural, afectando por tanto a la estructura interna del material; permanente, es decir, sin retorno (al menos en condiciones normales) y localizado ya que afecta a pequeños volúmenes de material. Seguidamente se asocia su origen a la presencia de sollicitaciones variables con el tiempo, no dándose por tanto en condiciones de carga estática. Finalmente se apunta que su efecto consiste en generar grietas, donde inicialmente no las había, y por último la rotura tras un número suficiente de fluctuaciones si dichas grietas progresan hasta alcanzar una longitud crítica.

Si relacionamos este proceso con la perspectiva temporal de la que hablamos antes, podemos asociar la disminución de la resistencia residual a la generación y crecimiento de grietas que, lentamente, van segando la sección resistente. En la rotura por fatiga, por tanto, aparece una microgrieta, que crece a medida que se realizan ciclos de carga hasta alcanzar un tamaño tal que la sección residual es incapaz de soportar la carga máxima en

el ciclo y finalmente el ligamento restante rompe de forma frágil o dúctil puesto que no hay apenas deformación plástica asociada a la rotura. La superficie de fractura es perpendicular a la dirección del esfuerzo. Analizando un fallo por fatiga podemos distinguir dos zonas en las caras de rotura: una zona suave con líneas asociadas a diferentes frentes de grieta, donde el rozamiento entre las caras produce esta superficie lisa y brillante, y una zona rugosa asociada a la rotura final.

La grieta se inicia en pequeños defectos o concentradores de tensiones. con cada ciclo de carga se produce un avance del frente de la grieta, de forma que la rotura se produce cuando la sección residual no soporta la carga estática. Existe evidencia de que la iniciación del proceso de fatiga requiere la superación local del límite elástico (a pesar de que macroscópicamente las tensiones sean inferiores al límite elástico).

Todos los materiales tienen defectos de uno u otro tipo, incluso recién fabricados por los mejores métodos disponibles: contienen inclusiones, precipitados, poros, bordes de grano... Son defectos a partir de los cuales se desarrollan microgrietas. Dependerá del nivel de tensiones el que estas microgrietas se propaguen hasta fracturar al componente o se detengan en la primera barrera microestructural (borde de grano, inclusión) u así permanezca para siempre.

Hay otro lugar crítico de una pieza: su superficie. En algún lugar de la superficie del sólido se encuentran las tensiones máximas (probablemente junto a algún concentrador de tensiones). Estas zonas son candidatas a desarrollar microdefectos superficiales en forma de estriaciones o lengüetas a causa de una deformación plástica alternada, debido a picaduras producidas por la oxidación superficial, o debidas a un pésimo mecanizado.

Ambos defectos, los internos y los superficiales compiten por romper la pieza. En general, si las cargas son muy severas, superan el límite elástico y se producen deformaciones plásticas apreciables en cada ciclo (fatiga de bajo número de ciclos o de gran amplitud), normalmente ganan los defectos interiores (parten con ventaja de tamaño). El ensayo de tracción es un caso extremo de fatiga de bajo número de ciclos. Si las cargas son más reducidas (fatiga de alto número de ciclos) suelen ganar los defectos que se originan en la superficie, pues tienen ventaja de velocidad de crecimiento sobre los internos (la oxidación les ayuda).

Una pieza que se diseña para soportar un elevado número de ciclos habitualmente morirá por un defecto generado en su superficie. Lo peor que se puede hacer es un acabado superficial lleno de rayas y estrías, ya que le habremos resuelto a la grieta su problema más difícil. Deberemos proporcionar a la pieza un buen acabado superficial para que los defectos internos tengan su oportunidad.

1.5.1. Estadios de fatiga

La historia de una grieta que se desarrolla en un componente sometido a fatiga tiene típicamente tres etapas: una etapa de iniciación, una de propagación estable y finalmente una propagación acelerada que conduce al fallo del componente.

- Estadio I

Habitualmente en la superficie se encuentran zonas con altas cargas alternadas que producen deformaciones plásticas en los granos próximos a la superficie. Esta deformación se localiza en bandas persistentes de deslizamiento. cuando un grano, situado en la superficie, deforma, se genera un escalón en la superficie, que inmediatamente se oxida. Una vez oxidada la superficie del escalón resulta imposible invertir la deformación en ese plano.

La deformación en sentido contrario deberá acontecer en otro plano, que obviamente forma otro escalón que se oxida y se suprime la deformación en este nuevo plano. La repetición de este ciclo de deformación, oxidación y bloqueo acaba por formar protuberancias o entrantes en la superficie original del sólido que concentra tensiones. La situación se agrava y termina por aparecer una microgrieta a partir de estos defectos superficiales que se propaga a lo largo de las bandas persistentes de deslizamiento (formando 45° con la dirección de la tracción).

En este estadio, la microgrieta tiene mucha dificultad para atravesar los bordes de grano, y a menudo, sólo consigue progresar en un grano y ahí se detiene. Si la carga es algo más alta o con suficiente número de ciclos, reinicia la propagación en el grano adjunto.

Hay que señalar que actualmente se considera la fase de inicio como una fase de propagación de grietas a una escala menor. De hecho puede considerarse que siempre existe alguna forma de imperfección inicial que actúa como grieta, de modo que la totalidad del fenómeno de la fatiga podría ser interpretado como un puro fenómeno de propagación.

- Estadio II

A medida que crece la grieta, pronto descubre que su dirección de crecimiento no es óptima y que su propagación requiere un menor trabajo si se orienta perpendicularmente al campo tractivo. Habitualmente la reorientación de la grieta ocurre cuando la microgrieta ha atravesado unos pocos granos en el material. A partir de este momento su propagación es estable y se ajusta a una ley potencial de intensidad de tensiones, de acuerdo a la ley empírica que propusieron Paris y Erdogan (1960):

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta K_I^m$$

en donde a es el tamaño de la grieta, N el número de ciclos, mientras que C y m son constantes que dependen del material y del medio ambiente.

A medida que crece el tamaño del a grieta, si las tensiones alternadas son constantes, aumenta ΔK_I y en consecuencia su velocidad de crecimiento: da/dN .

- Estadio III

Cuando el tamaño alcanza un valor conocido como tamaño crítico de grieta, la velocidad de crecimiento se acelera mucho más, convirtiéndose tal propagación de la grieta en catastrófica: la pieza rompe por clivaje o por coalescencia de microcavidades.

Este último estadio de la fatiga, en general, carece de interés ya que la velocidad de crecimiento es tan grande que el número de ciclos consumidos en el estadio III apenas tiene significación en la vida de la pieza.

Al tipo de fractura producido por fatiga se le denomina comúnmente progresiva, debido a la forma paulatina en que ocurre; frágil, ya que la fractura ocurre sin deformación plástica apreciable; y súbita, porque el fallo final ocurre muy rápidamente. En definitiva, las roturas por fatiga son especialmente peligrosas porque no suelen presentar indicios de fallo inminente, sino que éste se produce de modo repentino y sin que se observen deformaciones plásticas de conjunto. Es por ello que la fatiga constituye un problema verdaderamente importante en el mundo de la ingeniería; y es que la mayoría de las piezas que se rompen en servicio (algunos autores hablan de hasta el 90%) fallan debido a este fenómeno.

Es conveniente tener presente que los materiales poco dúctiles, los cuales tienen poca capacidad de deformación plástica, tienden a generar grietas con mayor rapidez que los materiales más dúctiles. Además, los materiales frágiles pueden llegar directamente a la propagación de grietas, a partir de microgrietas preexistentes. Los materiales frágiles, por tanto, no son adecuados para aplicaciones con carga variable.

1.5.2. Teorías de fatiga

Existen tres teorías que estudian la fatiga:

- Teoría clásica o teoría de alto número de ciclos

Esta teoría se emplea cuando el componente tendrá una vida con un número de ciclos elevado (mayor de 10^3). Considera que el fallo es la aparición de la grieta y existen un gran número de datos experimentales disponibles. Las curvas que rigen esta teoría son las curvas S-N (o curvas de Wöhler) donde se realiza la estimación de vida a partir de la amplitud de tensiones. En este caso, se parte de un modelo de comportamiento elástico, del cual se extrae el conjunto de ciclos de tensión que se originan a partir de las series temporales de carga. Posteriormente, mediante una serie de factores de concentración se aproxima el estado tensional a partir de la tensión en zonas situadas a niveles de carga inferiores al límite elástico.

- Fatiga de bajo número de ciclos

Al contrario que en la teoría anterior, esta se emplea para bajo número de ciclos (menor de 10^3) y se basa en el estudio de deformaciones en lugar de

tensiones. Son características de este modelo las curvas ϵ -N donde se establece una formulación de vida a partir de la amplitud de las deformaciones. Se modelizan así situaciones en las que la fluencia ocurre en posiciones críticas del componente. Se trata de zonas con concentración de tensiones o entallas, en las que la tensión local se sitúa por encima del límite de fluencia del material, a pesar de que el material de su entorno permanece en régimen elástico. Debido a dicho entorno elástico, la deformación de la zona situada un nivel de carga superior al de fluencia se ve restringida, lo que da lugar a una deformación elastoplástica controlada en la zona de entalla. A su vez, estas entallas, debido a la elevada tensión que experimentan, sirven como puntos críticos para el crecimiento de grietas, con lo que el comportamiento frente al fenómeno de fatiga puede relacionarse con ensayos de deformación controlada sobre diferentes probetas.

- Mecánica lineal de la fractura

En este tercer punto se considera que la grieta ya está iniciada y la vida se calcula como la propagación de la grieta hasta la rotura. Corresponde al estadio II de fatiga. Existen varias teorías en función de la grieta. Las grietas largas pueden ser estudiadas convenientemente utilizando la aproximación elástica lineal a la mecánica de la fractura (LEFM), mientras que las grietas cortas precisan los métodos más avanzados de la mecánica elastoplástica de la fractura (EPFM). No obstante, el estudio del crecimiento de grietas microestructuralmente cortas está aún en una fase muy temprana, siendo recomendable, hoy por hoy, utilizar métodos alternativos como las curvas ϵ -N para el análisis de las fases iniciales de la fatiga.

La formulación en desplazamientos es apropiada para situaciones en las que predomina la deformación plástica, y en las que se puede obtener una estimación correcta del nivel de tensión alcanzado. Es el caso de geometrías conocidas con niveles de tensiones altos. Por el contrario, en casos en los que la tensión alcanzada no llega al límite elástico, o bien en aquellas situaciones en las que resulta difícil prever la tensión en la zona de concentración, como es el caso de las uniones soldadas, se utiliza la formulación en amplitud de tensiones, que no tiene en cuenta el efecto de la plasticidad. En los casos en los que el nivel de carga es bajo el resultado se adecua a los valores obtenidos en los ensayos. Por otro lado, cuando se trata de estimar la vida en uniones o puntos de concentración de tensiones, se parte de puntos cercanos, que trabajan con tensiones inferiores al límite elástico y, por lo tanto, verifican la hipótesis de obviar la deformación plástica, de tal forma que a partir de los factores de concentración de tensión para cargas cíclicas se obtiene la tensión que permite extraer la estimación de la vida.

En este proyecto se han utilizado las dos primeras teorías que más adelante serán explicadas a conciencia.

1.5.3. Factores que afectan a la resistencia a fatiga

Los diferentes modelos de cálculo se basan en el comportamiento a fatiga de los materiales constituidos en forma de probetas lisas y pulidas sometidas a sollicitaciones alternativas (en el caso de las curvas S-N y ϵ -N), o bien en forma de probetas con grietas iniciales controladas sometidas a cargas pulsantes (en el caso de la tercera teoría que veíamos antes). Sin embargo, esta caracterización suele ser insuficiente para describir los problemas reales de la ingeniería. En ellos es preciso determinar, y a ser posible cuantificar, la influencia de diversos factores adicionales que se presentan en la práctica. El modo ideal de realizar dicha tarea sería efectuar ensayos a fatiga para cada aplicación. Sin embargo el costo y el tiempo necesarios hacen que en la mayoría de los casos esto no sea posible, o que al menos no resulte deseable en etapas iniciales del desarrollo.

Por este motivo se han efectuado gran cantidad de estudios encaminados a definir en qué forma se pueden alterar los resultados obtenidos en ensayos simples de modo que sean utilizables en situaciones reales más complejas. Lamentablemente, estos efectos, perjudiciales o favorables según el caso, no son fácilmente cuantificables aunque en la actualidad se están realizando grandes esfuerzos para introducir su consideración en los cálculos.

En este apartado se analizan los diversos factores que pueden modificar la resistencia a la fatiga y se indica cómo afectan a cada una de las dos teorías utilizadas para este proyecto.

- Efecto de la concentración de tensiones

Como ya se ha dicho, las curvas S-N y ϵ -N se determinan habitualmente a partir de probetas lisas y pulidas, donde el calificativo de lisas se refiere a la ausencia de singularidades geométricas como cambios bruscos de sección, agujeros etc. Sin embargo, en las aplicaciones reales difícilmente se encuentran componentes mecánicos a los que se pueda calificar de lisos sino que la mayoría de ellos contienen singularidades geométricas forzadas por razones constructivas o funcionales. La presencia de dichas singularidades es una de las principales causas de los fallos por fatiga y de aquí la importancia del estudio de su influencia.

- Concepto de concentración de tensiones

Se denomina concentración de tensiones al fenómeno de aumento local de la tensión respecto a cierto valor nominal debido a una variación brusca de la geometría, pudiéndose también presentar como consecuencia de variaciones en el tipo de material.

Se define el coeficiente geométrico de concentración de tensiones elástico teórico K_t en un punto, como el cociente entre la tensión real en dicho punto, determinada suponiendo un comportamiento elástico lineal del material, y otra tensión nominal de referencia.

El concepto de coeficiente geométrico de concentración de tensiones elástico tiene un gran interés puesto que permite resolver de un modo simple problemas

cuya solución rigurosa resultaría difícilmente abordable. Los valores de este factor para las configuraciones geométricas y modos de carga más habituales, se encuentran publicados en forma de tablas construidas a partir de soluciones analíticas o numéricas detalladas, o bien a partir de métodos experimentales de análisis de tensiones.

▪ El factor de entalla a fatiga

Desde un punto de vista físico el coeficiente geométrico de concentración de tensiones elástico tiene un significado relativo puesto que los materiales reales suelen presentar un comportamiento elastoplástico en las entallas. Por esta razón, la hipótesis de comportamiento elástico lineal es sólo una aproximación inicial que no suele cumplirse en la práctica. Este hecho, unido a otros que se analizan a continuación, hace que la presencia de singularidades geométricas reduzca la resistencia a la fatiga de los componentes mecánicos, pero no en la misma proporción que marca este factor. Por este motivo se introduce el concepto de factor de entalla a fatiga definido, para una vida dada, como:

$$K_f = \frac{\text{Resistencia a la fatiga sin entalla}}{\text{Resistencia a la fatiga con entalla}}$$

Como el valor de K_f es variable en función de la vida a fatiga es conveniente definir un valor de referencia. Como valor básico se toma el correspondiente a una vida de entre 10^6 a 10^7 ciclos bajo carga alterna.

Existen diversas causas posibles para la discrepancia entre K_t y K_f que se enumeran a continuación:

- A) Efecto del tamaño. Las diferencias de tamaño pueden influir desde diversos puntos de vista:
 - 1) Al aumentar el tamaño del componente aumenta la probabilidad de encontrar alguna imperfección del material que pueda dar origen a una grieta, dentro de la zona de solicitaciones altas.
 - 2) Al variar el tamaño del componente varía el tamaño relativo de las imperfecciones respecto al de la entalla.
 - 3) Las diferencias de tamaño originan cambios en los resultados obtenidos de los diversos procesos de fabricación y tratamiento.
 - 4) En general, para radios de entalla grandes K_f tiende a K_t mientras que al disminuir el radio, K_f tiende a decrecer frente a K_t .
- B) Efecto de la plastificación. En el fondo de las entallas existe cierto nivel de plastificación no contemplado por K_t .
- C) Efecto de las tensiones multiaxiales. K_t es un valor de frontera que no tiene en cuenta la presencia de estados multiaxiales de tensión en las zonas próximas a las entallas, mientras que el fenómeno de la fatiga ocurre en el volumen del material y no estrictamente en su superficie.

- D) Efecto del gradiente de tensión. Otra consecuencia del carácter volumétrico del proceso físico de la fatiga es la influencia del gradiente de tensión. Desde este punto de vista resulta crítico no el valor puntual de la tensión, sino su valor promedio en el pequeño volumen de material afectado por la fatiga.
- E) La distinta proporción entre las vidas de inicio y propagación de grieta en función de la severidad de la entalla. En presencia de entallas agudas la vida de inicio de grieta puede llegar a desaparecer con lo que el concepto de factor de entalla pierde su significado.
- F) Presencia de grietas que no se propagan como consecuencia de entallas agudas.

Experimentalmente se observa que, bajo fatiga alternativa, por regla general el valor básico de K_f es menor que K_t en la mayoría de los casos, por lo que suele resultar conservador tomar para K_t el valor básico de K_f . Sin embargo, esto puede dejar ocultas ciertas ventajas de aquellos materiales con menor sensibilidad a la entalla.

- El efecto de K_f sobre las curvas S-N

La presencia de una concentración de tensiones puede modificar sustancialmente el aspecto de la curva S-N disminuyendo o incluso haciendo desaparecer el límite de fatiga, al tiempo que cambia la pendiente de la curva. Más adelante se verá en profundidad este tipo de curvas, así como los factores modificadores donde hablaremos de este efecto.

- Enfoque elastoplástico

Dado que las grietas se originan en zonas de comportamiento elastoplástico, actualmente se prefiere definir un factor de concentración de tensiones al margen de la hipótesis de la elasticidad lineal del material, como el cociente entre la tensión real existente en el punto de interés (σ) y otro valor de tensión nominal de referencia (S):

$$K_\sigma = \sigma/S$$

De modo análogo se define un factor de concentración de deformaciones como el cociente entre la deformación real que existe en el punto de interés (ε) y otro valor de deformación nominal de referencia (e):

$$K_\varepsilon = \varepsilon/e$$

Al iniciarse la plastificación las tensiones tienden a saturarse con lo que la tensión real crece más lentamente que la nominal y K_σ disminuye respecto al valor K_t . Por el contrario las deformaciones reales crecen más rápidamente que las nominales debido a la fluencia local y K_ε aumenta respecto a K_t .

- Efecto de la tensión media

La mayor parte de los datos de fatiga se obtienen con cargas alternas. La presencia de valores de tensión media distintos a los de referencia tiene una incidencia diversa en el comportamiento a fatiga. La tendencia general es que las tensiones medias de tracción disminuyen la vida a fatiga respecto al caso de medias nulas, mientras que las de compresión la aumentan. Este hecho parece estar relacionado con los fenómenos de progresión de grieta, básicamente fomentados por las tensiones de tracción.

Dado que los ejes con los que se encontrará este proyecto trabajarán con cargas alternas cuya tensión media será cero, no es necesario seguir comentando este fenómeno.

- Efecto de la frecuencia

La frecuencia de aplicación de los esfuerzos tiene, a temperaturas moderadas y en ausencia de corrosión, poca influencia en la resistencia a la fatiga de los metálicos. La frecuencia de aplicación de las cargas también puede tener importancia en el caso de fatiga a altas temperaturas.

En general se presenta un ligero aumento de la resistencia a la fatiga de los materiales al aumentar la frecuencia, hasta cierto valor límite a partir del cual disminuye rápidamente. Este valor límite suele darse para un número muy elevado de ciclos. Para frecuencias normales el límite de fatiga o no varía o mejora un poquito, por lo que si no tenemos en cuenta este efecto estamos siendo conservadores. No obstante, cabe mencionar que a frecuencias elevadas puede producirse un excesivo calentamiento del material que afecte a su comportamiento mecánico.

- Efecto de las tensiones residuales y de montaje

En casi cualquier componente real se presentan, además de las tensiones de servicio, otras tensiones, en general de valor más incierto, debidas a los propios procesos de fabricación y montaje. En muchas ocasiones su presencia supone la diferencia entre un servicio satisfactorio del componente o el fallo prematuro por fatiga.

En general, tanto las tensiones residuales de proceso como las tensiones de montaje, actúan en el fenómeno de la fatiga como una tensión media que se superpone a la componente media de la carga aplicada exteriormente. En consecuencia su efecto es idéntico al descrito para este caso. Las tensiones de montaje o residuales de tracción son muy nocivas desde el punto de vista de la resistencia a la fatiga mientras que las de compresión pueden ser beneficiosas.

- Efecto del tratamiento superficial

Dado que el fenómeno de la fatiga empieza generalmente en la superficie, el estado mecánico de la misma resulta determinante en la posterior vida a fatiga del componente.

- Acabado superficial

El acabado superficial tiene una notable incidencia en la vida a fatiga por dos motivos. En primer lugar, cuanto más lisa es la superficie tanto menor es el efecto geométrico de concentración de tensiones, y en segundo lugar, el proceso de acabado superficial puede producir un endurecimiento por deformación plástica o introducir tensiones residuales. Los tres efectos suelen interaccionar entre sí haciendo difícil evaluar su importancia relativa. Lo que sí se puede afirmar es que cuanto más fino sea el acabado mayor será la resistencia a la fatiga. La sensibilidad al nivel de acabado superficial, al igual que la sensibilidad a la entalla, aumenta con la resistencia a la rotura del material. Así pues, los materiales más resistentes precisan de acabados superficiales más finos si se quiere sacar provecho de su mayor resistencia.

El acabado superficial tiene especial importancia para las vidas largas y puede tenerse en cuenta introduciendo un factor de acabado superficial (K_a) que mide la disminución de la resistencia a la fatiga y que más adelante se verá como calcularlo.

- Tratamientos mecánicos

Como ya se ha dicho, pueden introducirse tensiones residuales de compresión a fin de mejorar la vida a fatiga siempre que éstas no lleguen a relajarse totalmente. Para ello pueden utilizarse tratamientos mecánicos como los que se describen a continuación:

- A) Batido con perdigones. Consiste en proyectar a gran velocidad, bolitas de acero o fundición sobre la superficie del material. Como consecuencia del impacto y de la deformación plástica, se genera una capa de tensiones residuales de compresión. En contrapartida el acabado superficial resulta basto, aunque el efecto de entalla es pequeño. Para que este proceso pueda considerarse como un método fiable de mejora debe estar sometido a un riguroso control en cuanto a tamaño, material y calidad geométrica de las bolas utilizadas, así como de la velocidad de impacto y porcentaje de recubrimiento. Un ejemplo típico es la aplicación a la mejora de muelles, campo en el que se consiguen mejoras espectaculares.
- B) Laminado superficial. consiste en aplicar una presión elevada sobre la superficie del material hasta que éste se deforme plásticamente. como consecuencia de dicha deformación el material endurece y al mismo tiempo se introducen tensiones residuales de compresión en la superficie. El laminado superficial es mucho más controlable que el batido por perdigones. El espesor de la zona afectada puede ser mayor y pueden conseguirse acabados superficiales más lisos.

- C) Sobredeformación. Se aplica a componentes entallados y consiste en someter al componente a una precarga de tracción hasta que el material plastifique localmente en el fondo de la entalla. La posterior recuperación del entorno elástico al descargar, hace que el material deformado previamente en tracción quede sometido a una tensión residual de compresión. Evidentemente, dicha tensión de compresión queda balanceada por otra de tracción en la matriz elástica circundante. si la zona en compresión es suficientemente grande cualquier grieta, aunque se inicia, no progresará, quedando retenida en su interior.

■ **Tratamientos térmicos**

Los tratamientos térmicos tienen un efecto múltiple en la resistencia a la fatiga. con ellos se consigue un aumento de las características mecánicas y la generación de tensiones residuales de compresión en la superficie, lo cual incide de un modo directo dado el carácter superficial del fenómeno de la fatiga, así como una mayor resistencia al desgaste y a la fatiga por corrosión.

No obstante, cuando se emplean tratamientos térmicos, debe tenerse en cuenta la posible generación de tensiones residuales de tracción en ángulos y bordes, cuyo valor puede llegar a ser muy elevado, o de grietas debido a un tratamiento incorrecto. Por otra parte, dependiendo de la relación existente entre el gradiente de tensión y la profundidad de la capa endurecida, pueden presentarse fallos entre dicha capa y el núcleo.

Por último hay que señalar que, además de para introducir características deseables, los tratamientos térmicos también pueden utilizarse para eliminar tensiones residuales de tracción generadas por otros procesos como por ejemplo la soldadura.

■ **Influencia de los recubrimientos**

Los recubrimientos superficiales a base de metales no féreos que se aplican para mejorar la resistencia al desgaste, a la corrosión o al frotamiento, suelen disminuir la resistencia a la fatiga a causa de la generación de tensiones residuales de tracción en la superficie. Este efecto puede aminorarse mediante cualquier método tendente a compensar dichas tensiones.

● **Efecto de la microestructura**

La microestructura tiene un efecto apreciable a vidas largas de componentes no fisurados. La reducción del tamaño de grano, de las inclusiones y de cualquier otra imperfección, así como la existencia de una densa red de dislocaciones son favorables en tanto suponen barreras a la progresión de las grietas microestructuralmente cortas. Cualquier medida en este sentido debe evitar, no obstante, una excesiva pérdida de ductilidad en el material. En la fase

de propagación de grietas largas el efecto de la microestructura es mucho menos apreciable.

Los procesos de fabricación pueden hacer que la microestructura varíe con la dirección, presentando en esos casos una notable anisotropía.

- Efecto de la anisotropía del material

Los materiales reales utilizados en ingeniería presentan al menos dos tipos de anisotropía: la primera, macroscópica, asociada a la textura y al proceso de obtención del material, dirección de laminado, etc. La segunda, microscópica, asociada a la propia naturaleza de los metales. La anisotropía influye en el comportamiento a fatiga de una forma también doble. Por una lado, afecta desde el punto de vista de comportamiento elastoplástico a través de las relaciones entre tensiones y deformaciones. Por otro, afecta también desde el punto de vista de la resistencia a la fatiga. Ambos aspectos están interrelacionados y actúan simultáneamente. Pueden existir diferencias del orden de 2 a 3 veces en vida según la dirección en que se realice el ensayo de fatiga, o hasta un 45% de diferencia en el valor de límite de fatiga. Por ejemplo, en los materiales laminados, los granos e inclusiones se alargan en la dirección de laminación. La resistencia a la fatiga puede ser menor cuando las tensiones son perpendiculares a la dirección de elongación que cuando son paralelas a la misma.

- Fatiga por corrosión

Cuando al efecto de la corrosión se suma la presencia de cargas variables con el tiempo su efecto nocivo se intensifica. El efecto combinado de fatiga y corrosión simultáneas es muy superior al que se obtiene si ambos fenómenos ocurren por separado y sucesivamente, probablemente porque la carga alterna rompe las películas protectoras que retardan la corrosión, al mismo tiempo que las imperfecciones geométricas superficiales generadas por la propia corrosión disminuyen la resistencia a la fatiga y aumenta la velocidad de propagación de las grietas. A esta acción conjunta se le denomina fatiga por corrosión y tiene su efecto durante todas las fases de la fatiga.

Bajo condiciones de fatiga por corrosión no existe límite de fatiga definido y aumenta el efecto de la frecuencia de aplicación de los esfuerzos dado el carácter temporal de la corrosión.

El mejor medio para evitar la fatiga por corrosión es emplear materiales con elevada resistencia a la corrosión en el medio de que se trate y todos aquellos recursos que ayuden a evitarla, como tratamientos o recubrimientos superficiales, inhibidores químicos, etc.

- Fatiga por frotamiento

Se define la fatiga por frotamiento como el deterioro que tiene lugar en la superficie de los materiales debido al movimiento relativo de amplitud pequeña

entre dos superficies sólidas. Este fenómeno, cuyo mecanismo no se conoce con exactitud, disminuye la vida a fatiga de los componentes mecánicos y resulta muy difícilmente evaluable. Es típico de uniones no cinemáticas pero en las que se presentan pequeños movimientos relativos, como por ejemplo, uniones atornilladas, cubos montados a prensa sobre ejes, hojas de ballesta, etc.

La fatiga por frotamiento puede evitarse suprimiendo el movimiento relativo, facilitando el deslizamiento entre las superficies o mediante tratamientos superficiales. En cualquier caso, el éxito no está garantizado y puede ser necesario reconsiderar el diseño si esto llegase a suceder.

- Fatiga a temperaturas extremas

Aunque no es el objeto de este proyecto el estudio de la fatiga a temperaturas muy alejadas de la temperatura ambiente, se incluyen aquí unos breves comentarios al respecto, para ver que le ocurrirían a nuestros ejes en tales circunstancias.

- Fatiga a bajas temperaturas

No existe excesiva información sobre el comportamiento de los materiales a bajas temperaturas. Para las vidas largas hay una cierta tendencia a mejorar las características de fatiga al disminuir la temperatura, mientras que para las vidas más cortas esto no es así a consecuencia de la disminución simultánea de la ductilidad. Por otra parte, la tenacidad también disminuye con la temperatura, por lo que el tamaño crítico de las grietas es menor y éstas se vuelven más peligrosas.

- Fatiga a altas temperaturas

El fenómeno de la fatiga resulta mucho más complejo a altas temperaturas que a temperatura ambiente. En este caso, los aspectos metalúrgicos y la influencia de la oxidación aumentan su importancia, al mismo tiempo que resulta necesario considerar la presencia de tensiones de trabajo de origen térmico que pueden ser variables, y contribuir a la fatiga propiamente dicha.

En general, la resistencia a la fatiga disminuye y la velocidad de propagación de las grietas aumenta al aumentar la temperatura, presentando las mejores características de operación a alta temperatura los materiales con alta resistencia a la fluencia lenta en el tiempo.

1.5.4. Naturaleza estadística de la fatiga

El fenómeno de la fatiga no responde a un comportamiento determinista sino que presenta una amplia dispersión de resultados entre sucesos aparentemente iguales. Dicha dispersión, especialmente importante para las vidas largas, depende de factores exógenos y endógenos al material difícilmente evaluables (estructura interna, acabado superficial, etc.).

En cualquier cálculo, ensayo o estimación referente al comportamiento a fatiga debe tenerse en cuenta la naturaleza estadística del fenómeno, ya sea en la fase de inicio de grieta, como en la de propagación, como en la vida total a fractura.

Desde un punto de vista de diseño, y con los métodos actuales, no es posible garantizar probabilidades de fallo inferiores al 10% a partir del cálculo exclusivamente. Para obtener mayores niveles de precisión es necesario recurrir al ensayo y a la experiencia en el servicio real.

La naturaleza estadística de la fatiga condiciona la forma de tratar los diversos problemas relacionados con ella, no siendo posible obviar este tema tanto en las aproximaciones teóricas como experimentales. Así, por ejemplo, la pregunta ¿cuánto durará este componente en servicio? estaría mal formulada. En realidad sólo puede contestarse a preguntas del tipo: ¿cuál es la vida que superará cierto porcentaje de piezas?

A pesar de su importancia, fatiga y fractura son temas en los que existen aún áreas no conocidas totalmente como consecuencia de su naturaleza multidisciplinar y alta complejidad. Por este motivo resulta necesario un doble enfoque experimental y analítico, siendo ambas aproximaciones complementarias e imprescindibles. El papel de las aproximaciones analíticas es el de establecer los rasgos básicos a considerar con el objeto de minimizar el número de iteraciones experimentales, al tiempo que constituyen un medio idóneo para la interpretación global del problema. La aproximación experimental, por otra parte, aporta la valoración de aquellos aspectos no cuantificables mediante un modelo físico matemático. El tándem análisis-experimentación toma aquí su máximo significado. Ambos enfoques están en constante desarrollo precisándose de un seguimiento exhaustivo del mismo por parte de los profesionales relacionados con la materia.

El conocimiento del fenómeno de la fatiga y la posibilidad de evaluar su efecto es una cuestión clave desde un punto de vista industrial. Es muy imprudente basar el proyecto mecánico en la resistencia estática y confiarse a un coeficiente de seguridad (o de "ignorancia") elevado para protegerse de la fatiga. Esta práctica, por lo general muy extendida, conduce a componentes grandes, pesados y caros que no pueden competir en el mercado.

1.6. RESEÑA HISTÓRICA

Durante muchos años, la fatiga de los materiales, no fue una preocupación para el ser humano. Pero no porque no existiera. Esto es debido a lo lento del desarrollo productivo e industrial, con lo que las cargas a utilizar eran bastante menores. Sin embargo, con la llegada de la Revolución Industrial todo cambió. Así pues, los primeros casos de fatiga que llamaron la atención sucedieron cuando los ejes de los ferrocarriles, que pugnaban, por aquel entonces, por imponerse como medio de locomoción, comenzaron a fallar después de un corto tiempo de servicio.

Las primeras investigaciones sobre el tema parece ser que fueron divulgadas por un ingeniero de minas alemán, W. A. S. Albert, que en 1829 realizó una prueba de cargas repetidas en cadenas de hierro.

Sin embargo, el término "fatiga" fue usado por primera vez por Poncelet en 1839, para describir la situación de fallo de los materiales sometidos a cargas variables. Debido a que el fallo por fatiga tiene apariencia "frágil", se pensaba que el material se había "cansado" y hecho frágil después de soportar cierto número de fluctuaciones de esfuerzo. Similarmente, en 1843, Rankine publicó un estudio sobre las causas de la ruptura inesperada de los muñones de los ejes de ferrocarril, en el cual decía que el material dúctil se había cristalizado y hecho frágil debido a la fluctuación de los esfuerzos.

Por absurdas que puedan parecer estas teorías, hay que tener en cuenta que por entonces los conocimientos relativos a la estructura interna de los materiales eran muy limitados. No es extraño entonces, que se razonara que la rotura inesperada se produjera por la transformación de la estructura "fibrosa" del acero en una estructura "cristalina".

A mitades de siglo el ingeniero alemán August Wöhler inició y condujo la primera investigación sistemática sobre la fatiga. Pero no fue hasta 1870 cuando publicó los resultados de su estudio. Al realizar pruebas sobre las mitades rotas de los ejes que habían fallado por fatiga, observó que el material tenía la misma resistencia y ductilidad bajo carga de tensión que el material original; es decir, el material no se había "cansado" ni fragilizado como se creía. No obstante, el término fatiga se sigue utilizando para referirse a los fallos de los elementos sometidos a cargas variables. Wöhler encontró, además, la existencia de un límite de resistencia a la fatiga (o límite de fatiga) para los aceros realizando pruebas sobre probetas de acero sometidas a flexión giratoria (tipo de carga que se genera en un elemento que gira sometido a un momento flector constante). Fruto de estas pruebas son las curvas S-N que se utilizan hoy en día y en las que se basa parte de este proyecto. Su importancia hace que reciban un apartado aparte más adelante.

Más tarde, Gerber y Goodman estudiaron la influencia de la tensión media en la vida a fatiga creando diagramas que comprenden las tensiones alternante y media.

A comienzos del siglo XX (hacia 1910) Basquin mostró que las curvas S-N representadas en un diagrama con escalas logarítmicas se podían ajustar por una línea recta. En 1920, Griffith publicó sus estudios de la tenacidad a la fractura de piezas con una determinada grieta, iniciando la mecánica de la fractura. Poco después, en 1924, Palmgren desarrollo un modelo lineal de acumulación de daño producido en un componente por cargas de intensidad variable, siendo formulado en 1945 por Miner. En

la actualidad este criterio se conoce como regla de Palmgren-Miner de acumulación de daño.

De la segunda parte de siglo cabe destacar la figura de Rudolph Earl Peterson que contribuyó al estudio de los coeficientes de concentración de tensiones con la publicación de dos libros (uno en 1953 y otro en 1974). En 1954, muchos años después del descubrimiento del fenómeno de la fatiga, el Comet Británico, la primera aeronave a reacción comercial para pasajeros tuvo dos accidentes graves debidos a fallos por fatiga causados por ciclos de presurización y despresurización de la cabina, lo que propició el cambio de criterio en el diseño a fatiga en algunas secciones de la ingeniería, pasando del "safe-live" (seguridad para una vida dada, vida suficiente) al "fail-safe" (seguridad ante el fallo: se reducen los factores de seguridad al mínimo y se diseña de forma que las grietas que se presenten no originen el fallo del componente antes de que puedan ser detectadas y reparadas). La mayor contribución en el campo de la fatiga en la década de 1950 fue la introducción de los sistemas servohidráulicos en lazo cerrado para el ensayo de componentes y estructuras. También en esta década Irwin introdujo el coeficiente de concentración de tensiones en las proximidades de una grieta poniendo la base de la fractura mecánica lineal elástica (LEFM).

En la década de 1960 se estudió la fatiga a bajo número de ciclos, así Mason y Coffin establecieron la relación entre la vida a fatiga y la amplitud de la deformación plástica. Estas ideas propuestas por Topper y Morrow, junto con el desarrollo de la regla de Neuber y el conteo de ciclos rainflow propuesto por Matsuishi y Endo son la base para el análisis de fatiga por deformación en muescas. Paris estudió el ratio de crecimiento de grieta en función del factor de intensidad de tensión. Schijve puso de manifiesto el retardo que se produce en el crecimiento de una grieta en un componente sometido a una sobrecarga.

En la década de 1970 Elber demostró la importancia del cierre de la grieta en su crecimiento. Por su parte, Paris demostró la existencia de una tensión umbral por debajo de la cual la grieta no crece. También en esta década se establecieron cantidad de estándares para el diseño a fatiga en diferentes campos de la ingeniería, estableciéndose también las inspecciones para los requerimientos de tolerancia de daño.

En las décadas de 1980 y 1990 se ha investigado mucho en la fatiga multiaxial en fase y fuera de fase. Brawn y Miller propusieron la teoría del plano crítico. durante estas décadas el diseño asistido por computador con programas de elementos finitos y de estimación de vida tomó una gran importancia. También el prototipado rápido ha facilitado la creación de componentes para su ensayo. Dentro de esta época, en 1988, un Boeing 737 de Hawaiian Airlines perdió un tercio de la parte superior de la cabina en pleno vuelo, aunque aterrizó con pérdidas mínimas de vidas.

En la actualidad, el diseño asistido por computador comprendiendo simulaciones dinámicas, análisis por elementos finitos y predicción de vida, junto con sofisticados sistemas de ensayo de componentes y estructuras son las herramientas para un buen diseño a fatiga.

Si bien es cierto que no todo lo comentado en esta pequeña reseña histórica se ha tenido en cuenta a la hora de realizar este proyecto, se ha creído conveniente comentar brevemente todo esto para dejar patente que el problema de la fatiga es un problema reciente en la vida del ser humano y que en los últimos 150 años ha adquirido una

importancia capital en la sociedad actual, hasta el punto de ser el centro de muchas investigaciones. Como muestra de ello se han puesto dos ejemplos de trágicos sucesos en los que los fallos por fatiga llegaron a producir la muerte de personas.

1.7. TEORÍAS UTILIZADAS

El conocimiento del comportamiento del material frente a cargas variables es una herramienta fundamental para el diseño y verificación de componentes o estructuras sometidas a fatiga. Como ya se ha mencionado con anterioridad, los primeros intentos de caracterización de los materiales desde este punto de vista los realizaron Wöhler y sus contemporáneos a mediados del siglo XIX. Resultado de ello fue la aparición de las curvas S-N o curvas de Wöhler, que tratan la fatiga de forma puramente fenomenológica. La vida a fatiga se entiende aquí como una vida total, sin distinguir de forma explícita las distintas fases del fenómeno.

Aunque las curvas S-N han sido, y siguen siendo, una importante ayuda para el diseño mecánico, su enfoque excesivamente simplista, no cubre una gran cantidad de situaciones prácticas de importancia. Esto condujo a mediados del siglo pasado a profundizar en el desarrollo de modelos que se adaptaran mejor a las características físicas del fenómeno de la fatiga. El primer paso en este sentido supuso el estudio por separado de las vidas de inicio y propagación de la grieta dando origen a dos nuevos enfoques, alternativos a las curvas S-N y complementarios entre sí.

El primero de ellos es el método de la deformación local que, apoyado en la utilización de las denominadas curvas ϵ -N, predice la vida de inicio de grieta entendida en un sentido ingenieril. El segundo, basado en los principios de la mecánica de la fractura y en las curvas de crecimiento de grieta $da/dN - \Delta K$, permite estimar el número de ciclos necesarios para que una grieta crezca desde un tamaño inicial dado hasta otro final. Con esta segmentación del proceso de fatiga el análisis ha adquirido una mayor claridad en su interpretación física.

Siguiendo en la línea de simular el fenómeno físico de forma más precisa actualmente se están desarrollando nuevas segmentaciones que permitan una aproximación particularizada para cada una de sus fases, dejando los enfoques macroscópicos y aproximándose cada vez más a consideraciones de tipo metalúrgico desde la perspectiva del crecimiento de grietas. Sin embargo, estos desarrollos están aún en una etapa incipiente por lo que no resultan, hoy por hoy, de interés práctico en la ingeniería mecánica.

De las tres aproximaciones más utilizadas, curvas S-N, curvas ϵ -N y curvas $da/dN - \Delta K$, las dos primeras son las que se exponen seguidamente con cierto detalle, debido a que este proyecto se apoya sobremanera en ambas. Todas ellas se obtienen a partir de la realización de ensayos bajo cargas periódicas de amplitud constante muy simples, generalmente de tipo senoidal, a fin de evitar las complejidades adicionales.

1.7.1. Las curvas S-N

1.7.1.1. Determinación de las curvas S-N

Las denominadas curvas S-N resultan de someter una probeta de material a un ciclado de tensión, de amplitud constante y tensión media fija, y graficar el número de ciclos hasta la fractura final "N" contra la amplitud " S_a " de la tensión aplicada

durante el ensayo. La tensión se calcula a partir de las cargas actuantes en base a las fórmulas estándar de la resistencia de materiales. Por tanto se trata de tensiones nominales que sólo se corresponden con las tensiones reales en el material dentro del campo de la elasticidad lineal.

Está comprobado, tal como se analizará en un apartado posterior, que la resistencia a la fatiga no depende sólo de la amplitud de la tensión aplicada sino también de su valor medio, por lo que existe una de tales curvas para cada valor posible del mismo. A efectos de la caracterización básica del material suele escogerse la curva S-N correspondiente a una tensión media nula, es decir, se somete la probeta a carga alternada. El objeto de este proyecto es facilitar el cálculo de la vida a fatiga de ejes que estarán sometidos siempre a una tensión media nula, por lo que escoger esa curva es favorable para este estudio.

Para su determinación, y dado el carácter estadístico (comentado en un apartado anterior) de la fatiga, se parte de 4 ó 5 grupos de unas 15 probetas cada uno. Se seleccionan también 4 ó 5 niveles de amplitud de tensión alterna a partir de una estimación previa del campo de existencia de la curva. Cada subgrupo se ensaya a uno de los niveles escogidos sometiendo a las probetas a ciclos de tensión alterna que pueden ser originados, según el ensayo, por flexión plana, flexión rotativa, torsión o tracción-comprensión. el tipo de ensayo más fácil de realizar, y por tanto más habitual, es el de flexión rotativa sobre probetas cilíndricas. De nuevo debemos comentar que este tipo de carga es la que sufrirán nuestros ejes.

El dispositivo para ensayos de fatiga más empleado es la máquina de flexión rotativa de alta velocidad de R. R. Moore. Ésta somete a la probeta a flexión pura por medio de pesas.

El comportamiento frente a otros tipos de sollicitación suele extrapolarse a partir de los ensayos en flexión rotativa.

Para cada nivel de amplitud se registran los ciclos hasta la fractura final de cada probeta y los resultados se grafican en un diagrama S_a (amplitud de tensión alterna) - N (número de ciclos hasta el fallo). Para este fin suelen emplearse escalas doblemente logarítmicas puesto que la experiencia demuestra que generalmente en ellas los datos pueden ajustarse a una recta.

Los resultados presentan, sin embargo, una importante dispersión estadística en torno a los valores medios. por este motivo es conveniente ajustar más de una curva a la nube de datos resultante. De este modo es posible establecer las denominadas curvas S-N-P o lo que es lo mismo, familias de curvas S-N, cada una de las corresponde a una probabilidad de fallo distinta.

Por procedimientos de ensayo más simples pueden estimarse de modo rápido la curva S-N correspondiente a los valores medios (50% de fallos), pero aún así es preciso ensayar un mínimo de 8 probetas. La obtención de información estadística suficientemente precisa, implica la realización de numerosos ensayos. Desgraciadamente, hoy por hoy, no existe alternativa a esta necesidad.

1.7.1.2. El límite de fatiga

Algunos materiales, en condiciones ambientales adecuadas presentan un "codo" en la curva S-N de modo que, por debajo de cierto valor de la tensión alterna, no se presenta fractura. A dicho valor se le denomina "límite de fatiga" (S_f) y su existencia es característica de las aleaciones férricas no sometidas a corrosión.

Para la gran mayoría de los restantes materiales dicho límite no existe sino que en su lugar sólo hay un cierto alisamiento de la curva S-N, de modo que a la larga siempre se produce la rotura. En estos casos se define simplemente la resistencia a la fatiga para un número de ciclos dado.

Actualmente se considera que el límite de fatiga no está asociado al hecho de que no se formen microgrietas, sino que tiene su origen en la detención del avance de las mismas a nivel microestructural. Las grietas avanzan desde imperfecciones iniciales en el material, o en la microgeometría del mismo, pero acaban deteniéndose al no poder superar las barreras internas impuestas a su crecimiento por las fronteras de una macla, de un grano, u otras singularidades. La tensión alternante debe superar cierto valor umbral para que sean vencidos estos obstáculos al crecimiento de las grietas a escala metalográfica. El valor de tensión alternante necesario para superar la mayor barrera al crecimiento de las grietas en esta etapa inicial, es el límite de fatiga.

A partir de aquí es fácil comprender como cualquier factor que ayude a superar esta barrera puntual al crecimiento puede eliminar el límite de fatiga. Para ello basta la presencia de corrosión o una fracción de ciclos que ocasionalmente superen dicho límite. En este caso, la curva S-N puede dejar de presentar el codo que queda sustituido por un simple cambio de pendiente, cuyo punto significativo recibe el nombre de "nariz" de la curva de Wöhler.

En consecuencia, el concepto de límite de fatiga es un tanto resbaladizo en tanto que tal límite puede presentarse en las condiciones de laboratorio en que se trazan las curvas S-N y no darse en la utilización real.

En los aceros el límite de fatiga varía de modo aproximadamente lineal con la resistencia a la tracción hasta cierto valor de ésta (aproximadamente 1400 MPa) a partir del cual su valor queda estabilizado. Existe una gran cantidad de datos publicados acerca de los resultados de límite de fatiga obtenidos en flexión rotativa para un gran número de hierros y aceros. Mischke ha analizado muchos datos de pruebas reales provenientes de varias fuentes y concluye que el límite de fatiga puede estar relacionado con la resistencia a la tracción. En el caso de los aceros, la relación es:

$$S'_e = \begin{cases} 0.504 \cdot S_{ut} & \text{para } S_{ut} \leq 1400 \text{ MPa} \\ 700 \text{ MPa} & \text{para } S_{ut} \geq 1400 \text{ MPa} \end{cases}$$

donde S'_e indica el límite de resistencia a la fatiga en flexión rotativa de una probeta. El símbolo S_e se reserva para el límite a fatiga de un elemento de máquina particular sujeto a cualquier clase de carga.

Esta variación puede caracterizarse mediante el denominado "ratio de fatiga" que se define como el cociente entre el límite de fatiga y la resistencia a tracción (en los materiales que no presentan límite de fatiga, el numerador se define como la resistencia a la fatiga a una vida dada). Para muchos materiales el ratio de fatiga está comprendido entre 0.2 y 0.65, mientras que para un mismo material varía en función de factores como el acabado superficial, la corrosión, etc.

En primera aproximación pueden considerarse los valores del ratio de fatiga en flexión rotativa, para las vidas indicadas en ciclos, mostrados en la tabla de los anexos.

Para otros tipos de sollicitación los ratios de fatiga pueden estimarse aplicando factores reductores. No obstante, como se ha mencionado con anterioridad, el objeto de estudio de este proyecto está sometido a flexión rotativa, por lo que no es necesario utilizar ningún factor reductor para este menester.

1.7.1.3. Expresión analítica de las curvas S-N

Representada en escalas doblemente logarítmicas, la curva S-N se puede ajustar mediante líneas rectas, presentando el siguiente aspecto:

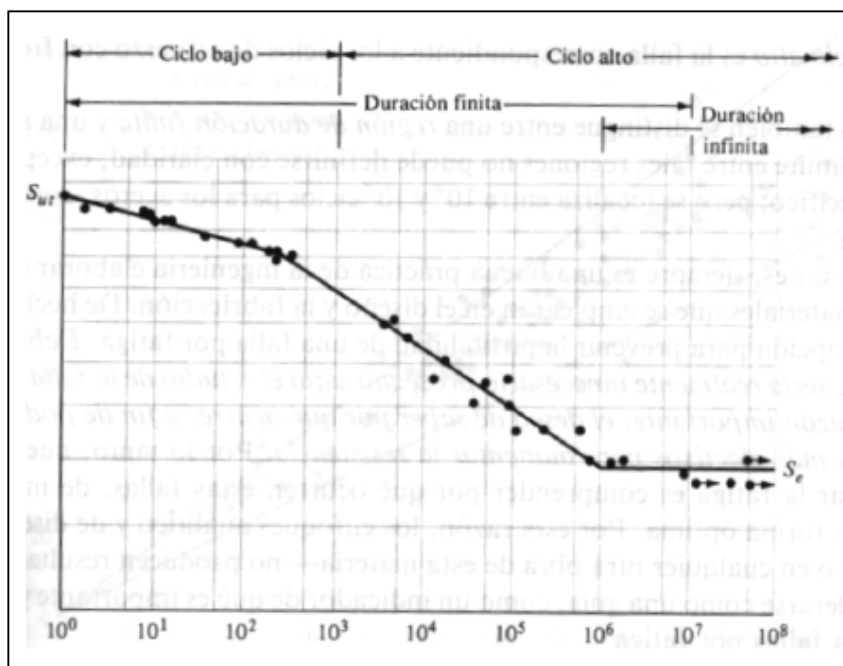


Figura 1.6

En el gráfico pueden apreciarse tres zonas bien diferenciadas. Por debajo de aproximadamente 10^3 ciclos las tensiones están en régimen claramente elastoplástico. Se trata de la denominada zona de ciclo bajo. Por encima de este punto se extiende la zona denominada de ciclo alto. En los materiales que presentan un límite de fatiga bien definido puede establecerse dentro de la zona de ciclo alto una zona de vida finita, hasta aproximadamente 10^6 a 10^7 ciclos, un punto de

cambio de pendiente correspondiente al límite de fatiga, y más allá del mismo una zona denominada de vida infinita.

La curva S-N es de especial interés en la zona de vida finita, ya que en la zona de ciclo bajo se prefieren otros enfoques debido a la presencia de deformaciones elastoplásticas, y la zona de vida infinita no suele presentarse en la práctica excepto en casos especiales.

En la zona de vida finita es habitual regresionar los datos experimentales mediante una recta empleando escalas doblemente logarítmicas, por lo que puede admitirse una expresión analítica de la curva S-N de tipo potencial:

$$S_a = A \cdot N^m \quad (P = 50\%)$$

donde A y m son constantes características del material.

Si se conocen de modo aproximado dos puntos de paso de la curva (S_1, N_1) y (S_2, N_2) es posible determinar por cálculo las constantes A y m a partir de la expresión anterior:

$$m = \log\left(\frac{S_1}{S_2}\right) / \log\left(\frac{N_1}{N_2}\right)$$

$$A = S_1 / N_1^m$$

En ocasiones puede obtenerse un mejor ajuste a una recta utilizando una escala lineal para las tensiones. La expresión alternativa para este caso sería de tipo:

$$S_a = C + D \cdot \log N \quad (P = 50\%)$$

cuyas constantes C y D pueden también determinarse a partir de dos puntos de referencia.

Como puntos de referencia suelen tomarse el límite de fatiga o la resistencia a la fatiga a un determinado número de ciclos, y la amplitud de tensión a una vida de mil ciclos.

1.7.1.4. Factores modificadores del límite de fatiga

Como ya ha sido mencionado, los ensayos a partir de los cuales se obtienen los datos de los diversos materiales, se llevan a cabo con probetas que tienen determinadas características. Sin embargo, las piezas, componentes o estructuras que se emplean en problemas reales son muy diferentes a las probetas. Es por ello por lo que es necesario determinar y cuantificar la influencia de diversos factores que pueden variar ostensiblemente los datos obtenidos de los ensayos.

A continuación analizamos una serie de coeficientes modificadores que permiten relacionar el límite de resistencia a la fatiga de un elemento mecánico (S_e) con los resultados de límite de resistencia a la fatiga obtenido con probetas de ensayo (S_e') y que, por lo tanto, incluyen la influencia de las diferencias con la aplicación real.

$$S_e = K_a \cdot K_b \cdot K_q \cdot K_d \cdot K_e \cdot K_g \cdot K_c \cdot S_e'$$

- Factor de superficie: K_a

La superficie de la probeta corresponde a un pulido especular, mientras que la de la pieza real, en general, presenta una rugosidad mayor. La sensibilidad a la rugosidad superficial es mayor cuanto mayor es la resistencia del material.

$$K_a = a \cdot (S_{ut})^b$$

Acabado de superficie	Factor a		Exponente b
	kpsi	Mpa	
Esmerilado (Rectificado)	1,34	1,58	-0,085
Maquinado o estirado en frío	2,7	4,51	-0,265
Laminado en caliente	14,4	57,7	-0,718
Forjado	39,9	272	-0,995

Tabla 1.1

- Factor de tamaño: K_b

El factor de tamaño ha sido evaluado a partir de datos experimentales. Como se ha comentado anteriormente, la fatiga es un fenómeno estadístico. Cuanto mayor sea el volumen de la pieza sometida a tensiones elevadas, mayor será la probabilidad de encontrar un defecto de tamaño crítico que provoque el inicio de una grieta. Es por ello que debemos considerar este factor de tamaño.

Los resultados en los casos de flexión rotativa y torsión se pueden expresar como:

$$K_b = \left(\frac{d}{7.62}\right)^{-0.1133} \quad 2.79 < d < 51mm \quad y \quad K_b = 0.6 - 0.75 \quad d > 51mm$$

O según otros autores:

$$K_b = 1 \quad d < 8mm \quad y \quad K_b = 1.189 \cdot d^{-0.097} \quad 8 < d < 250mm$$

Aunque no será nuestro caso, cuando se tienen secciones no circulares, se emplea una dimensión efectiva (d) obtenida al igualar el área de la sección no circular con una circular y despejando el diámetro de esta última.

- Factor de carga: K_q

Este coeficiente tiene en cuenta que la probeta en el ensayo trabaja a flexión rotativa y la pieza real puede que no. Como los ejes que manejemos en este

proyecto van a soportar el mismo tipo de esfuerzo que las probetas el valor de este factor será 1.

▪ Factor de temperatura: K_d

Este factor considera la diferencia de temperatura entre el ensayo realizado y la temperatura de operación. cuando las temperaturas son bajas se debe comprobar el fallo frágil, y cuando las temperaturas son altas se debe comprobar el fallo por fluencia. Esto es debido a la variación del límite elástico y la resistencia a la tracción con la temperatura. El límite elástico disminuye monótonamente con la temperatura, mientras que la resistencia a la tracción aumenta un poco inicialmente para luego disminuir. La variación de la resistencia a fatiga se supone similar a la de la resistencia a tracción.

$$K_d = \frac{S_{uT}}{S_u}$$

donde S_{uT} es la resistencia a tracción a temperatura T y S_u es la resistencia a tracción a temperatura normal (20 °C).

Temperatura (°C)	S_{uT}/S_u
20	1,000
50	1,010
100	1,020
150	1,025
200	1,020
250	1,000
300	0,975
350	0,927
400	0,922
450	0,840
500	0,766
550	0,670
600	0,546

Tabla 1.2

▪ Factor de concentración de tensiones: K_e

El factor de concentración de tensiones por fatiga es un valor que multiplica al esfuerzo nominal, con el fin de obtener un valor "corregido" del esfuerzo, que tenga en cuenta el efecto de la discontinuidad. El fallo por fatiga es muy sensible a la existencia de entalla. El efecto de la entalla sobre la resistencia a la fatiga se expresa mediante el factor de entalla a fatiga K_f :

$$\frac{1}{K_e} = K_f = 1 + q \cdot (K_t - 1)$$

De acuerdo con estudios experimentales, K_f depende del coeficiente geométrico de concentración de tensiones (K_t), del material y del radio de la discontinuidad. Para tener en cuenta estos dos últimos, se define el coeficiente de sensibilidad a la entalla (q), el cual es un coeficiente cuyo valor representa cuán sensible es el material frente a la discontinuidad de radio r .

Para hallar el coeficiente de sensibilidad a la entalla (q), podemos reescribir la expresión anterior de la forma:

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1}$$

De esta forma, podemos apreciar más fácilmente que la sensibilidad a la entalla es máxima para $q = 1$, y entonces se tiene que $K_t = K_f$, mientras que para $q = 0$, la sensibilidad es mínima y entonces $K_f = 1$. El factor de sensibilidad a la entalla puede estimarse a partir de la siguiente relación empírica:

$$q = \frac{1}{1 + (a/r)}$$

donde r es el radio de la entalla y a es una dimensión característica del material que puede tomar, a efectos generales, los siguientes valores:

Material	a
Aleaciones de Aluminio	0,51
Aceros bajos en carbono recocidos o normalizados	0,25
Aceros templados y revenidos	0,064
Aceros de alta resistencia con $S_u > 550 \text{ MPa}$	$0,025 \cdot \left(\frac{2070}{S_u}\right)^{1,8} \quad (S_u \text{ en MPa})$

Tabla 1.3

Algunos autores como Norton reescriben la ecuación anterior:

$$q = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}\right)}$$

para llamar a \sqrt{a} constante de Neuber. Obsérvese que las ecuaciones son similares pero hay que tener cuidado, ya que los valores empleados para una $nada$ tienen que ver con los valores de la constante de Neuber, debido a que la segunda ecuación emplea la raíz cuadrada del radio. Este proyecto utilizará la primera ecuación mencionada pero se ha creído conveniente mencionar esta segunda para evitar equivocaciones a la hora de escoger el valor de la constante

a, ya que varios autores como Norton, dan valores para \sqrt{a} cuyo cuadrado no es el valor que este proyecto utiliza (a).

Es de destacar que, a igualdad de tamaño de entalla, los materiales más resistentes son, en general, más sensibles al efecto de las entallas.

Por su parte, para obtener el coeficiente geométrico de concentración de tensiones (K_t) recurriremos al Peterson, donde podemos encontrar solución a infinidad de casos. En los anexos podrán observarse las tablas que puedan ser de utilidad para este proyecto.

✓ El efecto de K_f sobre las curvas S-N

La presencia de una concentración de tensiones puede modificar sustancialmente el aspecto de la curva S-N. En la figura 1.7 se muestran las curvas S-N para componentes fabricados de un mismo material pero afectados de diversos tipos de entalla. Como se aprecia, una entalla puede disminuir e incluso hacer desaparecer el límite de fatiga, al tiempo que cambia la pendiente de la curva S-N.

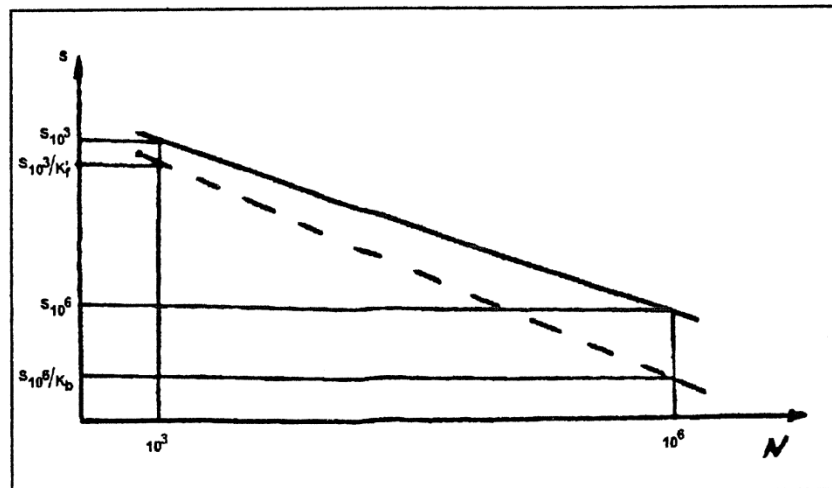


Figura 1.7

El valor de K_f no es constante al variar el número de ciclos hasta fractura. su variación depende del comportamiento del material. A tensiones nominales bajas la tensión local, que es igual a $K_t \cdot S_a$, es inferior al límite elástico cíclico y en esas condiciones K_f es aproximadamente igual a K_t . Sin embargo, cuando la tensión local alcanza el valor del límite elástico, y suponiendo un comportamiento elástico y perfectamente plástico, su valor ya no puede crecer más por lo que K_f , interpretado como el cociente entre la tensión real en la entalla y la tensión nominal, va disminuyendo. Por último, cuando la tensión nominal alcanza también el valor del límite elástico, fluencia generalizada, K_f se iguala a la unidad.

Si se conoce el valor de K_f en dos puntos, por ejemplo para mil y un millón de ciclos, es posible corregir la curva S-N de un componente liso

suponiendo que K_f actúa como un reductor de la resistencia más que como un elevador de las tensiones.

El valor de K_f a mil ciclos (K'_f) puede estimarse, a partir de gráficos según algunos autores. No obstante, en nosotros lo calcularemos analíticamente por medio de la expresión:

$$K'_f = 1 + c \cdot (K_f - 1)$$

siendo

$$c = \frac{0.3 \cdot S_u}{700} - 0.1$$

donde S_u está expresada en MPa.

▪ Factor de efectos diversos: K_g

Este factor engloba todas aquellas cuestiones que hagan variar el límite de fatiga y no se tengan en cuenta en los demás factores. Es por tanto un coeficiente muy ambiguo y muy difícil de evaluar. Por citar algún tema que se incluya aquí:

- A) Los esfuerzos residuales (son tensiones que permanecen en el material en ausencia de carga) pueden aumentar el límite de fatiga cuando son compresivos o disminuirlo cuando son de tracción. Como ya se dijo, hay operaciones como bombardeo con perdigones, martillado, ... que mejoran el límite a fatiga del componente al introducir tensiones residuales de compresión.
- B) El límite de fatiga de piezas forjadas, laminadas ... puede verse afectado por la direccionalidad de la operación que produce que el material se comporte de forma anisótropa. Así, la resistencia a fatiga transversal puede ser un 10-20% inferior.
- C) Las piezas con temple superficial pueden fallar en la superficie o a la distancia del radio máximo del núcleo, dependiendo del gradiente del esfuerzo.
- D) Cuando se produce el fenómeno de corrosión desaparece el límite de fatiga.
- E) Recubrimientos electrolíticos como el cromado, niquelado y cadmiado reducen el límite de fatiga hasta un 50%. El galvanizado (revestimiento con cinc) no afecta.
- F) El metalizado por aspersión origina imperfecciones en la superficie que pueden ser principio de grietas. Se estima una reducción del orden del 14% de la resistencia a la fatiga.

- G) El fenómeno de corrosión por apriete (Fretting Corrosion) es el resultado de movimientos microscópicos en la superficie de piezas mecánicas o estructuras con ajuste (juntas atornilladas, cojinetes, ...). El proceso no es muy conocido, pero parece ser un problema de concentración de tensiones y desgaste por deslizamiento relativo entre eje y elementos calados al que se le añade una acción corrosiva sobre las superficies desgastadas. La reducción en la resistencia a fatiga es de hasta el 70%. soluciones a este problema son mejoras de diseño (reducción del deslizamiento), recubrimiento de Molibdeno, o tratamientos superficiales.
- H) Frecuencia de la carga. A bajas frecuencias no se aprecia variación, sin embargo, a altas frecuencias, el componente puede ser que se caliente variando, de este modo, su comportamiento.

Es muy difícil ajustar todo esto a un modelo matemático, por lo que el valor de este factor se toma en función de lo que pueda afectar o no a cada aplicación y, sobretudo, a la experiencia de la persona que haga el análisis o diseño. Así pues, en el presente proyecto el valor por defecto para el factor de efectos diversos será de 1, dejando libertad, eso sí, para que el usuario pueda cambiarlo según crea conveniente.

- Factor de confiabilidad: K_c

Tal como viene comentándose, la fatiga es un fenómeno estadístico. La distribución de las resistencias a la fatiga es una distribución normal para un número fijo de ciclos, con una desviación típica o standard σ . Si se adopta el valor medio de resistencia, significa que el diseño se realiza con una confianza del 50%. Funcionalmente, se diseña para una seguridad funcional del 90%. En general:

$$K_c = 1 - \sigma \cdot D$$

La desviación típica σ en aceros es del 8%. Como no se ha encontrado este dato para el aluminio, se ha tomado el mismo valor que para los aceros. Naturalmente, cuando se cargue un material de la biblioteca será posible alterar el valor de sus constantes, pudiendo así escoger un valor más apropiado. Igualmente, esta constante podrá modificarse directamente en la biblioteca.

Probabilidad de vida	Factor de multiplicación de la desviación D
50	0
85	1
90	1,3
95	1,6
99	2,3
99,9	3,1
99,99	3,7

Tabla 1.4

1.7.1.5. Líneas de fallo

El cálculo de fatiga se plantea cuando existe una variación en el tiempo de la carga actuante. La variación de los esfuerzos de los elementos de ingeniería no necesariamente es igual a la que ocurre en flexión giratoria. Por lo tanto, es necesario considerar distintos casos de variación de esfuerzos. En un elemento sometido a cargas variables, los esfuerzos pueden variar con respecto al tiempo (t) de una forma muy irregular como se observa en la figura 1.8, y generalmente es difícil predecir con exactitud cómo es tal variación. Por ejemplo, el esfuerzo normal máximo en una viga de un ala de una aeronave puede variar de manera muy irregular, al ser sometida a la fuerza del viento y a las vibraciones que debe soportar.

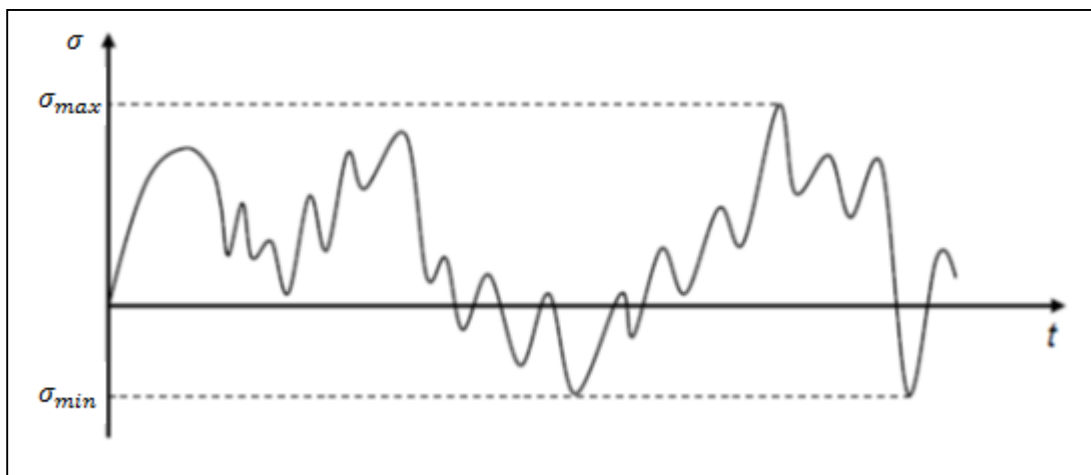


Figura 1.8

El modelo de fallo por fatiga utilizado para este proyecto se basa en el diagrama de Wöhler, el cual se obtiene con pruebas sobre probetas sometidas a flexión rotativa. Este tipo de carga produce una variación sinusoidal de los esfuerzos, por lo que en esta teoría se modela cualquier tipo de variación de esfuerzos de una manera sinusoidal, que es justo la que tendrán los ejes que resolveremos.

En ausencia de corrosión, la forma exacta en que varían los esfuerzos no es tan importante. Lo que incide en el fallo por fatiga es el número de ciclos y los valores máximos y mínimos de los esfuerzos. La figura 1.9 muestra un modelo de variación sinusoidal para la variación real de esfuerzos de la figura anterior. Los valores de los esfuerzos máximo y mínimo se han mantenido iguales a los valores reales, y el periodo (o la frecuencia) fue escogido de tal manera que parezca similar al de la curva real.

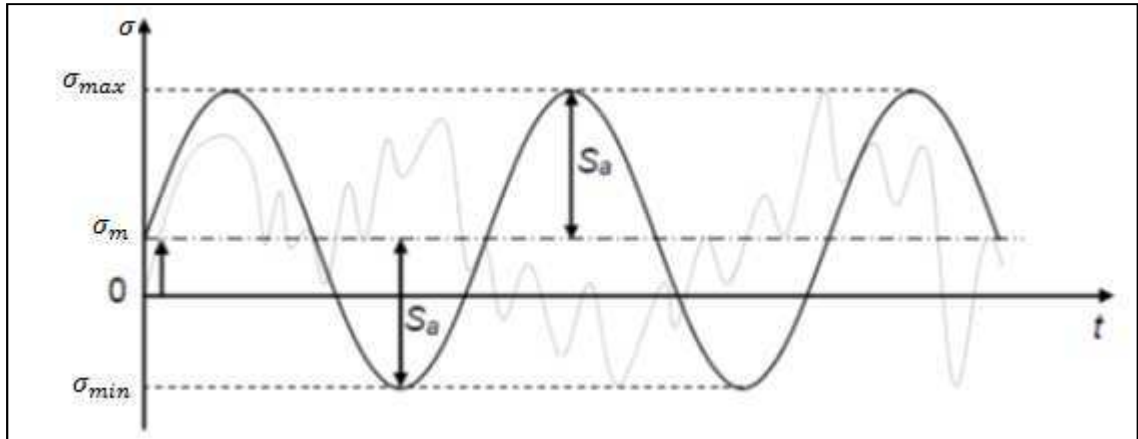


Figura 1.9

Hay que observar que, aún cuando las definiciones se realizan a partir de variaciones senoidales de la tensión, son generalizables a cualquier otro tipo de evolución temporal. Se definen los siguientes valores característicos:

- Tensión máxima: σ_{max}
- Tensión mínima: σ_{min}
- Tensión alternada: $\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$
- Tensión media: $\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$
- Rango de tensión: $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 2 \cdot \sigma_a$
- Relación de esfuerzos: $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$

Es frecuente encontrar solicitaciones que se invierten alternativamente o que aparecen y desaparecen de forma intermitente. Un ejemplo típico del primer caso lo encontramos en un eje giratorio sometido a un momento torsor constante. Durante cada revolución del eje, una misma partícula de material se ve sometida a tensiones de tracción y compresión de la misma magnitud dependiendo de su posición relativa respecto a la fibra neutra. En este caso la relación de esfuerzos es $R = -1$ y se dice que la sollicitación es alternada.

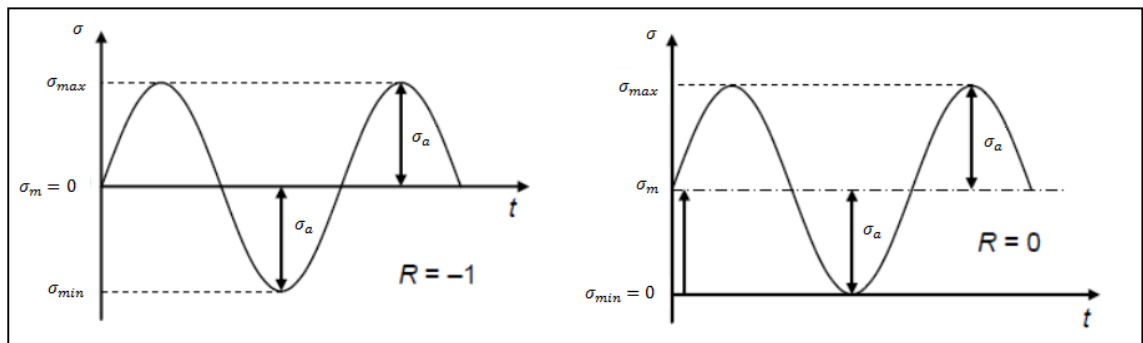


Figura 1.10

La segunda situación es característica de elementos que entran en carga y se descargan de forma cíclica. Este es el caso, por ejemplo, del diente de un engranaje que transmite un par constante. Dicho diente experimenta una flexión siempre en el mismo sentido cada vez que traspasa la zona de engrane. La sollicitación entre un valor nulo y un máximo, corresponde a $R = 0$, y se denomina pulsante.

Para otros valores de R se dice simplemente que la sollicitación es fluctuante.

El límite de fatiga y la resistencia a la fatiga para vida finita constituyen propiedades base para el diseño de elementos sometidos a cargas variables. Sin embargo, S_e' no puede ser utilizado directamente en el diseño, ya que es obtenido bajo condiciones especiales de esfuerzo: probeta normalizada y pulida, girando sometida a flexión bajo condiciones ambientales favorables.

Particularmente, nos interesa referirnos aquí a las condiciones de flexión giratoria. Bajo este tipo de carga, la probeta sufre una variación sinusoidal de esfuerzo repetido para la cual el esfuerzo medio es igual a cero. Se necesitan ecuaciones de diseño que sirvan no sólo para un esfuerzo repetido, sino también para cualquier tipo de variación sinusoidal, donde σ_m pueda ser diferente de cero. Para encontrar dichas ecuaciones fueron necesarias más pruebas experimentales, de las cuales se concluyó que, en general, si se agrega una componente media del esfuerzo, el elemento falla con una componente alternativa menor.

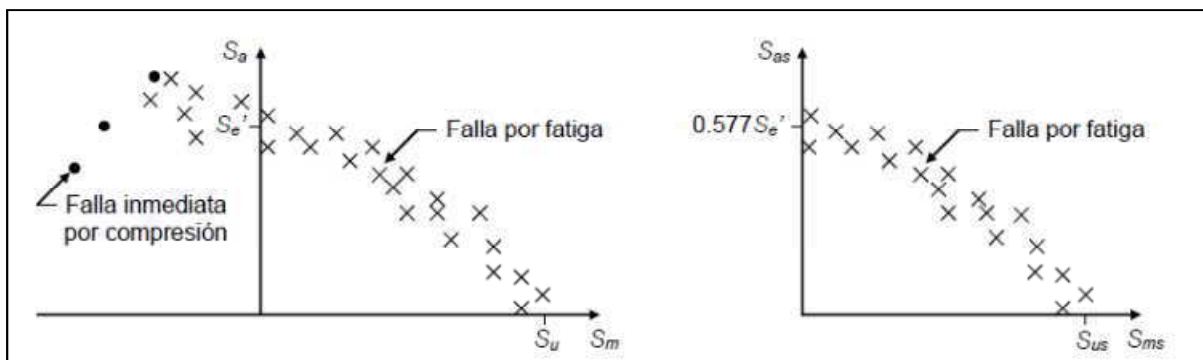


Figura 1.11

La figura 11 muestra las tendencias típicas que siguen los puntos de ensayo en diagramas de esfuerzo medio-esfuerzo alternativo, cuando se someten probetas normalizadas y pulidas a diferentes combinaciones de esfuerzos. Las cruces en los diagramas indican las combinaciones para las cuales un pequeño aumento en el esfuerzo medio o en el alternativo produciría el fallo de la probeta. Las combinaciones de esfuerzos que estén entre la zona de las cruces y el origen del diagrama no producirían fallo, mientras que las que estén por fuera producirían el fallo de la probeta de ensayo.

Analicemos algunos puntos de los diagramas. Al someter una probeta a un esfuerzo estático, ésta fallará cuando el esfuerzo (máximo) sea igual a la resistencia. Si el esfuerzo es estático, $\sigma_{max} = \sigma_{min} = \sigma_m$ y $\sigma_a = 0$ (no hay amplitud de onda) o $\tau_{max} = \tau_{min} = \tau_m$ y $\tau_a = 0$ (para esfuerzos cortantes); entonces, el fallo en estas

condiciones estará representado por el punto $(\sigma_R, 0)$ o $(\tau_R, 0)$. Al observar los diagramas vemos que las cruces tienden hacia dichos puntos.

La condición de fallo de una probeta a flexión giratoria está representada por la combinación $(0, S_e')$, es decir, el esfuerzo medio es cero y el esfuerzo alternativo (que será igual al máximo) que produce el fallo es S_e' . Efectivamente, puede observarse que en un diagrama las cruces tienden a dicho punto, mientras que en el otro tienden a $0,577 \cdot S_e'$, ya que como sabemos por Von Misses la resistencia a la fatiga a torsión es aproximadamente ese valor.

El esfuerzo medio cortante se toma siempre positivo, por lo tanto en su figura sólo aparece el lado positivo de τ_m . Por su parte, para esfuerzos normales, el esfuerzo medio puede ser positivo o negativo, tal como se muestra también en la figura.

Podemos agregar que para ambos diagramas la tendencia de los puntos en el lado positivo del esfuerzo medio es similar. En el lado negativo de τ_m , las cruces tienden a subir un poco a medida que el esfuerzo medio aumenta en compresión, hasta llegar a unos valores de esfuerzos tales que no se produce fallo por fatiga, sino que se produce un fallo inmediato (fluencia o rotura) por compresión. Esto es debido a que los esfuerzos de compresión no expanden las grietas. Un punto sometido a esfuerzos cortantes variables puede desarrollar grietas, al hacerlo, los esfuerzos normales de tracción, no los de compresión, son los encargados de expandir la grieta.

Hasta ahora hemos tratado el tema a través de las probetas normalizadas para los ensayos de fatiga. Con las piezas reales el fundamento es exactamente el mismo.

Para modelar los datos experimentales para $\sigma_m < 0$ se asume una línea de fallo horizontal (aunque se ha mencionado que para esfuerzos de compresión los puntos de ensayo tienden a aumentar un poco) y se extiende hasta una zona donde ocurre la rotura por compresión.

Para modelar los datos experimentales para $\sigma_m \geq 0$ existen varias aproximaciones:

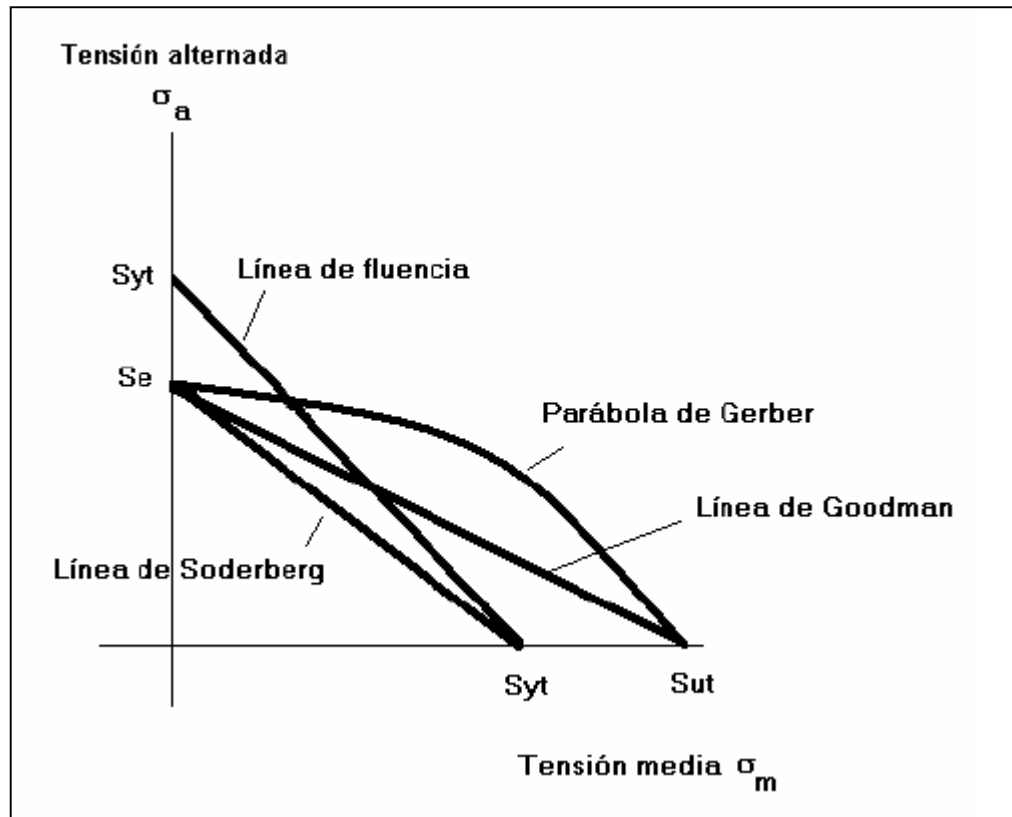


Figura 1.12

- Línea de fluencia

Este criterio supone que una pieza sometida a fatiga se rompe por tensión alterna cuando la tensión supera el límite elástico. Asimismo, también romperá por tensión media si sobrepasa el mismo límite.

$$1 = \frac{\sigma_m}{\sigma_y} + \frac{\sigma_a}{\sigma_y}$$

- Línea o Parábola de Gerber

La línea de Gerber es una parábola que pasa por los puntos $(0, S_e)$ y $(\sigma_R, 0)$, en el diagrama $\sigma_m - \sigma_a$, y está dada por:

$$1 = \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_R} \right)^2 + \frac{\sigma_a}{S_e}$$

Esta aproximación es razonablemente fiel a los datos de ensayo y corresponde al 50% de confiabilidad; es decir, la mitad de los puntos de ensayo (cruces) están por encima de la parábola y la otra mitad está por debajo. Si se diseñara directamente con estas ecuaciones se tendría un 50% de probabilidad de no fallar. Esta línea de fallo es particularmente útil para el análisis de piezas que han fallado por fatiga, pero según Norton no se usa mucho para diseñar.

- Línea de Goodman

La línea de Goodman es una recta que corta los ejes por los mismos puntos que la parábola de Gerber. Partiendo de la ecuación general de una línea recta y utilizando los dos puntos conocidos en la recta, llegamos a la ecuación de la línea de Goodman:

$$1 = \frac{\sigma_m}{\sigma_R} + \frac{\sigma_a}{S_e}$$

Esta aproximación es menos exacta que la de Gerber, pero tiene dos ventajas. La primera que es más conservadora, ya que la mayoría de cruces quedan por encima de la línea. Y la segunda, la ecuación de una línea recta es un poco más sencilla que la ecuación de una parábola. Por ello, el criterio de Goodman es el más empleado en fatiga.

- Línea de Soderberg

La línea de Soderberg es una recta que, a diferencia de la línea de Goodman, pasa por el punto $(\sigma_y, 0)$, es decir, utiliza como criterio de fallo el límite elástico y no el de rotura. Este criterio es muy conservador, pero evita la verificación de que no ocurra fluencia inmediata. La ecuación de la línea de Soderberg es similar a la de Goodman:

$$1 = \frac{\sigma_m}{\sigma_y} + \frac{\sigma_a}{S_e}$$

De las aproximaciones citadas, la de Gerber es recomendada para el diseño por algunos autores y, como se dijo, es útil para el análisis de piezas que han fallado por fatiga. La línea de Soderberg podría utilizarse para materiales que poseen límite elástico. Aunque es demasiado conservadora, es recomendada por algunos autores. Según Norton, la línea de Goodman modificada es la preferida. Esta línea entremezcla las líneas de fluencia y de Goodman.

Recordemos que este proyecto centra su atención en ejes que trabajan a flexión rotativa. Por tanto, en los casos que aquí se traten la tensión media siempre será cero. Así pues, en el diagrama de las líneas de fallo que veíamos antes figura 1.12, nos posicionaremos en el eje de ordenadas para todos los casos. Puede verse que tanto el criterio de Gerber, como el de Soderberg y el de Goodman parten del mismo punto de ese eje: $(0, S_e)$. Así pues, para este proyecto, los 3 criterios son exactamente iguales a efectos prácticos.

Sin embargo, en lo referente a la componente de torsión ocurre justo al revés. Es la tensión alterna la que se hace cero siempre y, por tanto, ahora sí que debemos decantarnos por uno u otro criterio, y dado que el más utilizado es el de Goodman, será éste en el que nos basaremos para hacer los cálculos.

En la ecuación que utilizaremos aparecerá una tensión alterna (σ_a) debido a la flexión y una tensión media (τ_m) debido a la torsión. Tomando como criterio de fallo la línea de Goodman y teniendo en cuenta a Von Misses:

$$1 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{S_e}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_R}\right)^2}$$

Por tanto el coeficiente de seguridad para vida infinita (C_s) será:

$$\frac{1}{C_s} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{S_e}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_R}\right)^2}$$

1.7.1.6. Campo de utilización de las curvas S-N

Como ya se ha dicho, las curvas S-N representa la tensión nominal existente en la probeta contra el número de ciclos a fractura. El hecho de que se tome como referencia la tensión nominal hace que para cada tipo de ensayo (flexión, tracción-compresión, etc.) se obtengan curvas distintas y que para el estudio de cada componente real deba emplearse una curva S-N adecuada al modo de sollicitación.

En consecuencia, el tipo de ensayo se debería escoger por similitud con la aplicación real. Sin embargo suelen determinarse las curvas S-N a flexión rotativa dada su facilidad de obtención, extrapolándose los resultados a otros casos a partir de relaciones empíricas. En el caso de este proyecto, los ejes con los que se trabaje estarán sujetos a flexión rotativa, por lo que no será necesario llevar a cabo ninguna extrapolación.

Hay que hacer notar también que la tensión nominal se calcula a partir de la hipótesis de elasticidad lineal por lo que no se obtienen valores físicamente reales de la tensión si se llega a la plastificación del material. A causa de ello, las curvas S-N se utilizan para el estudio de la fatiga a gran número de ciclos, donde predomina la fase de inicio de grieta frente a la de propagación y las deformaciones son básicamente elásticas. No son adecuadas, por tanto, para la fatiga a pocos ciclos, zona en la que predominan las deformaciones plásticas.

A modo de conclusión, emplearemos esta teoría cuando trabajemos con tensiones en la entalla inferiores al límite elástico del material y, por tanto, nos encontremos en la zona elástica del diagrama tensión-deformación. No obstante, el programa proporcionará los resultados de ambas teorías dando un mensaje de cuál se recomienda.

1.7.2. Las curvas ϵ -N

1.7.2.1. Comportamiento cíclico uniaxial

La utilización de la tensión nominal elástica como parámetro definitorio de la fatiga deja de lado el verdadero comportamiento del material que, en las zonas de inicio de grieta, suele encontrarse trabajando macroscópicamente en la zona elastoplástica.

A esto debe añadirse el hecho, conocido desde ya hace más de medio siglo, de que la relación entre tensiones y deformaciones es distinta bajo carga cíclica que en condiciones de carga estática o monotónica. Esto, unido a que son precisamente las tensiones y las deformaciones cíclicas las causantes de la fatiga, ha originado un creciente interés por lo que se conoce como comportamiento cíclico del material.

1.7.2.1.1. Control por tensión y control por deformación

Un material puede ser sometido a ciclos sucesivos de tensión constante como en el trazado de las clásicas curvas S-N. Se dice entonces que el proceso de fatiga está gobernado por tensión. Bajo este tipo de control, y para niveles de tensión apreciables, puede presentarse el fenómeno de fluencia en el tiempo, o creep, debido al cual la deformación media aumenta de modo progresivo. Este hecho dificulta la obtención de ciclos estables de tensión-deformación especialmente en presencia de valores no nulos de la tensión media.

Otra posibilidad es someter el material a ciclos de deformación de amplitud constante. Se dice entonces que el proceso de fatiga está gobernado por deformación.

La elección de un tipo de ensayo u otro dependerá pues de la aplicación que se quiera dar a los resultados obtenidos. Los dos tipos de control rigen el comportamiento del material en multitud de componentes y estructuras. Sin embargo, hay que señalar que el control por deformación es el que mejor caracteriza el comportamiento del material en el fondo de las entallas, zonas típicas para el inicio de las grietas, por lo que suele preferirse al tratarse de un caso práctico habitual.

1.7.2.1.2. Características del comportamiento cíclico

En el control por deformación, y dependiendo del estado inicial, de las condiciones de esfuerzo y de la temperatura, se puede producir un ablandamiento (softening), un endurecimiento (hardening), o simplemente un comportamiento estable del material sometido a sollicitación cíclica.

Sin embargo, una gran cantidad de materiales llegan a estabilizar su comportamiento tras un período inicial transitorio cuya duración oscila entre el 20% y el 40% del tiempo necesario para el inicio de grieta, independientemente de la magnitud de la deformación impuesta. Esto facilita el estudio de la fatiga en la zona de vidas cortas donde se presentan deformaciones plásticas importantes.

Existen otros dos fenómenos típicos del comportamiento cíclico. El primero de ellos es la relajación de la tensión media cuando se cicla el material a deformación constante. El segundo se presenta cuando se cicla en control por tensión, manteniendo una tensión de amplitud constante y media positiva en régimen elastoplástico, y consiste en una acumulación inestable de deformación.

Es de destacar que el comportamiento cíclico estable de los materiales es muy parecido en control por tensión y control por deformación sólo para ciclos de tensión media nula. En los ensayos realizados en control por tensión, la presencia de una tensión media no nula actúa sobre el comportamiento cíclico modificando las amplitudes de deformación, fenómeno que no se observa en control por deformación.

El rango de deformación total correspondiente al ciclo estable, y en la hipótesis de pequeñas deformaciones, puede suponerse compuesto por una parte elástica y otra plástica tal como se muestra en la figura 1.13.

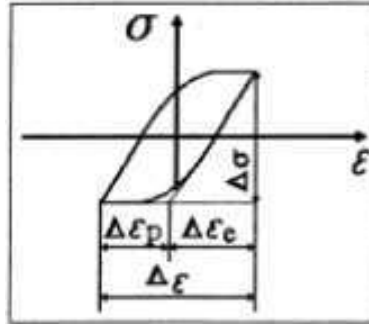


Figura 1.13

De modo que es posible escribir: $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon_p + \Delta\epsilon_e$

1.7.2.1.3. La curva cíclica

Como se ha dicho, y debido al período transitorio inicial de ablandamiento o endurecimiento, la relación tensión-deformación cíclica estable no se corresponde con la estática, o monotónica. Empíricamente se demuestra que para gran cantidad de materiales dicha relación queda caracterizada mediante la denominada curva cíclica, definida como el lugar geométrico de los extremos de sucesivos ciclos estables de histéresis correspondientes a distintos niveles de deformación.

Las curvas cíclica y monotónica, entendiéndose por tal la que corresponde a un ensayo a tracción realizado sobre el material sin ciclar, pueden ser muy distintas entre sí. Es conveniente tener esto en cuenta en el diseño a fatiga puesto que parámetros básicos como el límite elástico pueden verse alterados. A la derecha se muestran los distintos tipos de comportamiento posibles.

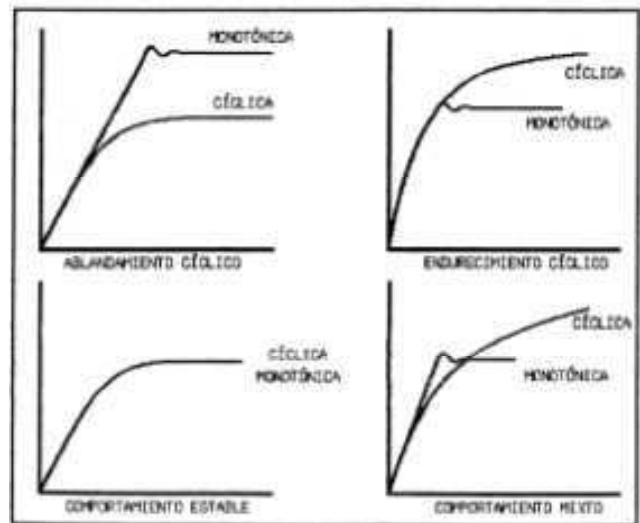


Figura 1.14

A partir del análisis de resultados experimentales se ha determinado que es posible relacionar la amplitud de la tensión σ_a con las amplitudes de deformación plástica ε_p y elástica ε_e a través de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= (\sigma_a/k')^{1/n'} \\ \varepsilon_e &= \sigma_a/E\end{aligned}$$

La suma de ambas es igual a la amplitud de deformación total ε_a :

$$\varepsilon_a = \varepsilon_p + \varepsilon_e$$

Con lo que se llega a la siguiente expresión analítica para la curva cíclica:

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{k'}\right)^{1/n'}$$

donde, k' (coeficiente de resistencia cíclica), n' (exponente de endurecimiento por deformación cíclica) y E (módulo elástico) son constantes características del material.

Idealmente, la curva cíclica debería determinarse superponiendo sobre un mismo gráfico las formas de los ciclos estables asociados a cada nivel de deformación. En la práctica este procedimiento es sustituido por otro aproximado consistente en ciclar el material siguiendo una distribución de amplitudes triangular. El comportamiento tensodeformacional se registra entonces hasta alcanzar una respuesta estable. En estas condiciones el lugar geométrico de los extremos de los ciclos de histéresis define la curva cíclica.

1.7.2.1.4. Relaciones cíclicas tensión-deformación

Durante la sollicitación cíclica el material no sigue la curva cíclica como camino de carga tal como esto se entiende en el caso monotónico. Es necesario caracterizar la forma de las curvas que forman el ciclo de histéresis a fin de obtener la verdadera relación tensión-deformación.

De la propia definición de la curva cíclica se desprende que si se desplaza el ciclo de histéresis de modo que el extremo inferior se corresponda con el origen de dicha curva, su extremo superior deberá encontrarse sobre la curva cíclica ampliada en un factor de dos.

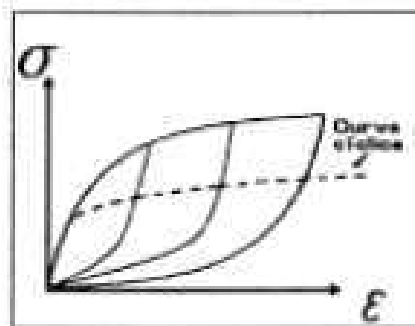


Figura 1.15

Además, se ha comprobado experimentalmente que, para una gran cantidad de materiales, tanto la curva creciente del ciclo como la decreciente caen muy cerca de ese lugar geométrico en toda su longitud, a lo que se denomina comportamiento Masing. Por ello resulta razonable en muchos casos aproximar el trazado de cualquier ciclo de histéresis estable a partir de la curva cíclica aumentada en un factor de dos y desplazada en su origen.

Para la parte creciente del ciclo se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{2} = \frac{\sigma - \sigma_r}{2E} + \left(\frac{\sigma - \sigma_r}{2k'} \right)^{1/n'}$$

mientras que para la decreciente la expresión es:

$$\frac{\varepsilon_r - \varepsilon}{2} = \frac{\sigma_r - \sigma}{2E} + \left(\frac{\sigma_r - \sigma}{2k'} \right)^{1/n'}$$

donde σ y ε son los valores de tensión y deformación instantáneas y ε_r y σ_r son los valores de tensión y deformación en el punto inicial de cada tramo.

Hay que hacer notar que existen materiales para los que la aproximación de Masing no es válida y otros en los que es sólo una aproximación suficiente desde un punto de vista práctico.

1.7.2.2. Determinación de las curvas ε -N

Las curvas ε -N relacionan niveles de deformación alterna mantenida con el número de ciclos hasta la aparición de una grieta de cierta magnitud. La longitud de dicha grieta puede estar entre 0.25 y 5 mm dependiendo de la amplitud de deformación, del módulo elástico y de la sensibilidad a las grietas del material.

Para construir una curva ε -N se ensayan probetas de pequeñas dimensiones sometidas a sollicitaciones de tracción-compresión bajo control por deformación, es decir, a valor constante de la amplitud de deformación total, hasta que se alcanza el fallo. El número de inversiones correspondiente (doble del número de ciclos N) y el valor de la amplitud de deformación se llevan sobre un gráfico en escalas doblemente logarítmicas. Como las curvas ε -N son sensibles a la tensión media del ciclo, los ensayos se realizan para un valor dado de dicho parámetro escogiéndose generalmente el igual a cero.

Dado el carácter estadístico del fenómeno hay que ensayar más de una probeta a cada nivel de deformación. Para el trazado de las curvas ε -N correspondientes al 50% de supervivientes se recomienda ensayar entre 12 y 24 probetas, sin embargo, si se desea información sobre curvas correspondientes a diversos niveles de probabilidad de fallo el número de probetas debe ser aún mayor.

1.7.2.3. Expresión analítica de las curvas ε -N

Es posible construir una expresión analítica de la curva ε -N de un material a partir de dos hechos experimentales:

- Basquin (1910)

Si en la construcción de una curva tensión número de ciclos hasta la aparición de una grieta se emplea la tensión real en lugar de la de ingeniería, y se representan los resultados en escalas logarítmicas, ésta queda linealizada desde el origen.

Por tanto es posible es posible escribir una expresión del tipo:

$$\sigma_a = \sigma'_f (2N)^b$$

donde, σ'_f (coeficiente de resistencia a fatiga) y b (exponente de resistencia a fatiga) son constantes características del material.

- Manson-Coffin (1960)

Se comprueba también experimentalmente que, a niveles de deformación altos, la relación existente entre la amplitud de deformación plástica y el número de inversiones hasta la aparición de grieta, se puede aproximar mediante una función potencial del mismo tipo que en el caso anterior.

Analíticamente:

$$\varepsilon_p = \varepsilon'_f (2N)^c$$

donde, ε'_f (coeficiente de ductilidad a fatiga) y c (exponente de ductilidad a fatiga) son constantes características del material.

A partir de estas dos relaciones y de la hipótesis ya utilizada de que: $\varepsilon_a = \varepsilon_e + \varepsilon_p$, se llega a establecer una aproximación analítica para la curva ε -N.

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_a}{E} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon'_f (2N)^c$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c$$

Evidentemente, la observación realizada ya sobre la dispersión de los datos y el significado estadístico de la curva S-N, puede extrapolarse a la curva ε -N.

Puede observarse que la ecuación a resolver es una ecuación no lineal por lo que para resolverla se ha optado por utilizar el método iterativo de Newton-Raphson (ver apartado 1.4.2)

Es necesario disponer de las características cíclicas y de fatiga para el material ($k', n', \sigma'_f, b, \varepsilon'_f$ y c). Si no están todas disponibles pueden utilizarse algunas de las relaciones existentes entre ellas. La fiabilidad de la predicción depende fuertemente de la calidad de estos parámetros. Si se desea dar significación estadística a los resultados, debe disponerse de información sobre las dispersiones de cada uno de los parámetros de la curva ε -N.

El efecto del acabado superficial a vidas largas puede tenerse en cuenta modificando el exponente b a partir del factor de acabado superficial que veíamos en la teoría S-N (K_a) del siguiente modo:

$$\hat{b} = \frac{\log(K_a) + 6.3b}{6.3}$$

1.7.2.4. La vida de transición

Se define la vida de transición, N_t , como aquella que corresponde al punto en que se igualan las componentes plástica y elástica de la deformación total. Para valores de N inferiores a N_t la ductilidad gobierna la capacidad del material para soportar la fatiga, mientras que para valores superiores el factor dominante es la resistencia.

El material ideal sería entonces aquel que presentara alta ductilidad y resistencia elevada simultáneamente. Por desgracia, esto no es así sino que ambas características son antagónicas. El compromiso óptimo debe evaluarse en función del espectro de deformaciones esperado en servicio, es decir de la importancia relativa de la deformación en la zona de vidas largas y cortas.

La expresión analítica de N_t se obtiene, como ya se ha dicho, de igualar ε_e con ε_p , quedando:

$$\frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b = \varepsilon'_f (2N)^c$$

$$2N_t = \left(\frac{\varepsilon'_f \cdot E}{\sigma'_f} \right)^{1/(b-c)}$$

Aunque físicamente este punto no tiene ninguna importancia para este proyecto, lo mencionamos porque lo hemos utilizado como punto de partida en el método iterativo para encontrar el número de ciclos que aguantará el eje según esta teoría.

1.7.2.5. Determinación de las constantes de fatiga

Las constantes de fatiga para la curva correspondiente al 50% de supervivientes se determinan mediante una doble regresión lineal de los resultados experimentales. El proceso consiste básicamente, en separar la deformación total en sus dos componentes, plástica (ε_p) y elástica (ε_e), y efectuar la regresión lineal de las dos expresiones anteriores:

$$\log(2N) = \frac{1}{b} \log(\varepsilon_e) - \frac{1}{b} \log\left(\frac{\sigma'_f}{E}\right)$$

$$\log(2N) = \frac{1}{c} \log(\varepsilon_p) - \frac{1}{c} \log(\varepsilon'_f)$$

Como puede observarse, la variable dependiente a la que se supone asociada la aleatoriedad es la vida a inicio de grieta, mientras que la variable bajo control es la deformación. Hay que notar que las curvas así obtenidas sólo pueden ser utilizadas dentro del rango de deformaciones definido por los propios datos utilizados en la regresión. Cualquier extrapolación fuera de dicho rango puede conducir a resultados incorrectos.

Desafortunadamente es frecuente no disponer de datos adecuados para realizar este tipo de ajustes. En orden a solventar este problema existen dos caminos:

- A) Localizar a través de la bibliografía un material equivalente del cual se dispongan las constantes de fatiga.
- B) Estimar las características mediante fórmulas empíricas.

Para este último caso existen diversas aproximaciones, tres de las cuales se exponen a continuación. Las dos primeras válidas para el acero estructural y la tercera válida para un amplio espectro de materiales metálicos.

B1) Estimaciones para aceros estructurales

❖ Estimaciones a partir del ensayo de tracción

En este caso se parte del conocimiento de la tensión de rotura (σ_R) y del tanto por ciento de estricción ($Ra\%$). Las fórmulas utilizadas para la aproximación son las siguientes:

$$\varepsilon'_f = \varepsilon_f$$

$$c = -0.5 a - 0.7$$

$$\sigma'_f = \sigma_R + 345 \text{ (MPa)}$$

$$b = -\frac{1}{6} \log\left(\frac{2\sigma'_f}{\sigma_R}\right)$$

donde:

$$\varepsilon_f = \ln\left(\frac{100}{100 - \%Ra}\right): \text{coeficiente de ductilidad}$$

❖ Estimaciones a partir del ensayo de dureza Brinell

En este caso se sustituye el ensayo de tracción por un ensayo de dureza Brinell. El grado de abstracción es en este caso mucho mayor que en el anterior. Las fórmulas utilizadas para la aproximación son las siguientes:

$$\sigma_R \approx 3.45 \cdot BHN$$

$$\sigma'_f \approx \sigma_R + 345 \text{ (MPa)}$$

$$b \approx -\frac{1}{6} \log\left(\frac{2 \cdot \sigma'_f}{\sigma_R}\right)$$

$$c \approx -0.56$$

$$2N_t \approx \ln^{-1}(13.6 - 0.0185 \cdot BHN)$$

$$\varepsilon'_f = \frac{\sigma'_f}{E} 2N_t^{(b-c)}$$

B2) Estimaciones para otros materiales metálicos

Existe una expresión aproximada para la curva ε -N, debida a Manson, que se puede aplicar a una gran variedad de materiales cuando no se dispone de mejores datos. Dada su generalidad a dicha expresión se la denomina “fórmula de las pendientes universales”.

$$\Delta\varepsilon = 3.5 \frac{\sigma_R}{E} (N)^{-0.12} + (\varepsilon_f)^{0.6} (N)^{-0.6}$$

donde σ_R y ε_f son características monotónicas del material.

1.7.2.6. Otras ecuaciones

Existen otras ecuaciones, además de la ya mencionada, que tienen en cuenta el efecto de la tensión media. Si bien es cierto que ya se comentó brevemente cómo influye la tensión media en el comportamiento a fatiga y se dijo que no se iba a profundizar puesto que los ejes en este proyecto trabajarían con tensión media nula, ahora sólo mencionaremos algunas ecuaciones que son muy utilizadas en este ámbito.

En ausencia de entallas, la expresión corregida de la curva ε -N para tener en cuenta el efecto de la tensión media es la ecuación de Morrow:

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N_t)^b + \varepsilon'_f (2N_t)^c$$

Existe otra ecuación de Morrow:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \varepsilon_a = \frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E} (2N_t)^b + \varepsilon'_f \left(\frac{\sigma'_f - \sigma_m}{\sigma'_f} \right)^{c/b} (2N_t)^c$$

En 1970, Smith, Topper y Watson propusieron, sin justificación teórica, un parámetro que según ellos correlacionaba multitud de resultados de ensayos uniaxiales realizados a diversos niveles de tensión media. La forma del parámetro propuesto por estos investigadores es:

$$P_{swt} = (\sigma_{max} \frac{\Delta\varepsilon}{2} E)^{1/2}$$

Dada la independencia del parámetro P_{swt} respecto a la tensión media, puede determinarse su valor a partir de las curvas de fatiga bajo carga alternativa. En efecto, en el caso especial de tensión media nula, $\sigma_{max} = \Delta\sigma/2$, con lo que:

$$P^2_{swt} = \frac{\Delta\sigma\Delta\varepsilon}{4} E = \sigma'^2_f (2N)^{2b} + \sigma'_f \varepsilon'_f E (2N)^{c+b}$$

Este parámetro ha sido utilizado con éxito en multitud de casos prácticos debido, según una intuición de sus autores, a su capacidad de modelar la fase de inicio de grieta más cierta parte de la fase de propagación de la misma.

No obstante, y pese a haber mencionado brevemente algunas otras ecuaciones, recordamos que éstas son para tener en cuenta la influencia de la tensión media y, dado que en nuestro caso su valor será cero, no utilizaremos ninguna de ellas.

1.7.2.7. Campo de aplicación de las curvas ε -N

Las curvas ε -N permiten tratar una gran cantidad de situaciones prácticas. Dado su carácter doblemente asintótico permiten tratar, con un único planteamiento, tanto aquellas situaciones en las que predomine la componente elástica de la deformación (fatiga a ciclos altos) como aquellas en las que lo haga la componente plástica de la misma (fatiga a ciclos bajos). Por este motivo son especialmente adecuadas para el análisis de registros de deformación irregulares en los que coexistan deformaciones plásticas esporádicas con deformaciones mayoritariamente elásticas.

Por otra parte, el hecho de que las curvas ε -N son obtenidas a partir de ensayos controlados por deformación, supone una mejor aproximación al comportamiento físico del material en zonas entalladas, punto habitual del inicio de las grietas.

Desde el punto de vista práctico, las curvas ϵ -N presentan los inconvenientes de precisar un gran número de características mecánicas del material, que no siempre están disponibles, y el de requerir de cálculos más complejos que en el caso de las curvas S-N.

Además, la definición del fallo es, aún, un tanto ambigua ya que se basa en la aparición de una grieta observable que puede estar entre 1 y 5 mm.

Hay que insistir en que las curvas ϵ -N se trazan para una probabilidad de fallo del 50%, lo cual obliga a interpretar los resultados desde un punto de vista estadístico y a efectuar las oportunas correcciones para probabilidades de fallo menores.

Emplearemos esta teoría cuando trabajemos con tensiones en la entalla superiores al límite elástico del material y, por tanto, nos encontremos en la zona plástica del diagrama tensión-deformación. No obstante, y como ya se comentó en la teoría S-N, el programa proporcionará los resultados de ambas teorías indicando cuál de ellas recomienda.

1.8. GUÍA DE USUARIO

Este programa es el pilar fundamental de un proyecto final de carrera de Ingeniería Industrial. Es por este motivo que, pese a tratarse de un programa informático, este manual no tratará cuestiones relacionadas con el mundo de la informática, sino que lo que se busca aquí es explicar cómo ha de utilizarse el programa para poder obtener los resultados al problema planteado. Como podrá verse a continuación es un programa muy fácil de usar donde el usuario tan solo tendrá que ir introduciendo los datos requeridos por el sistema.

Se creyó conveniente crear varias ventanas y utilizar cada una de ellas para añadir un tipo de datos del eje, en contraposición con aglutinarlo todo en unas pocas. Quizás haya sido un poco más laborioso, pero sin duda, de este modo, el programa resulta mucho más simple para el usuario. La mayoría de estas ventanas tienen un formato similar: constan de un recuadro en la parte superior donde se muestran los dibujos (bien del eje o de los diagramas/resultados), y una parte inferior donde serán pedidos los datos, en las unidades que aparecen en cada caso (a su derecha).

Para evitar equívocos, se aclara que no en todas las ventanas se dibuja el eje tal y como es, puesto que el hacerlo podrían dibujarse unas cosas encima de otras, lo que podría confundir al usuario. Por eso se ha optado, por ejemplo, porque en la ventana correspondiente a los chaveteros no se dibujen las secciones interiores. Además en las ventanas de los elementos de transmisión y de los diagramas, en el plano XY se dibujan los chaveteros y las fuerzas tangenciales (siempre y cuando el ángulo de ataque haga que exista; en caso contrario, se muestran las fuerzas radiales), mientras que en el plano XZ se trazan las secciones interiores y las fuerzas radiales (al igual que en el otro plano, si no existen fuerzas radiales en este plano, se dibujarán las tangenciales).

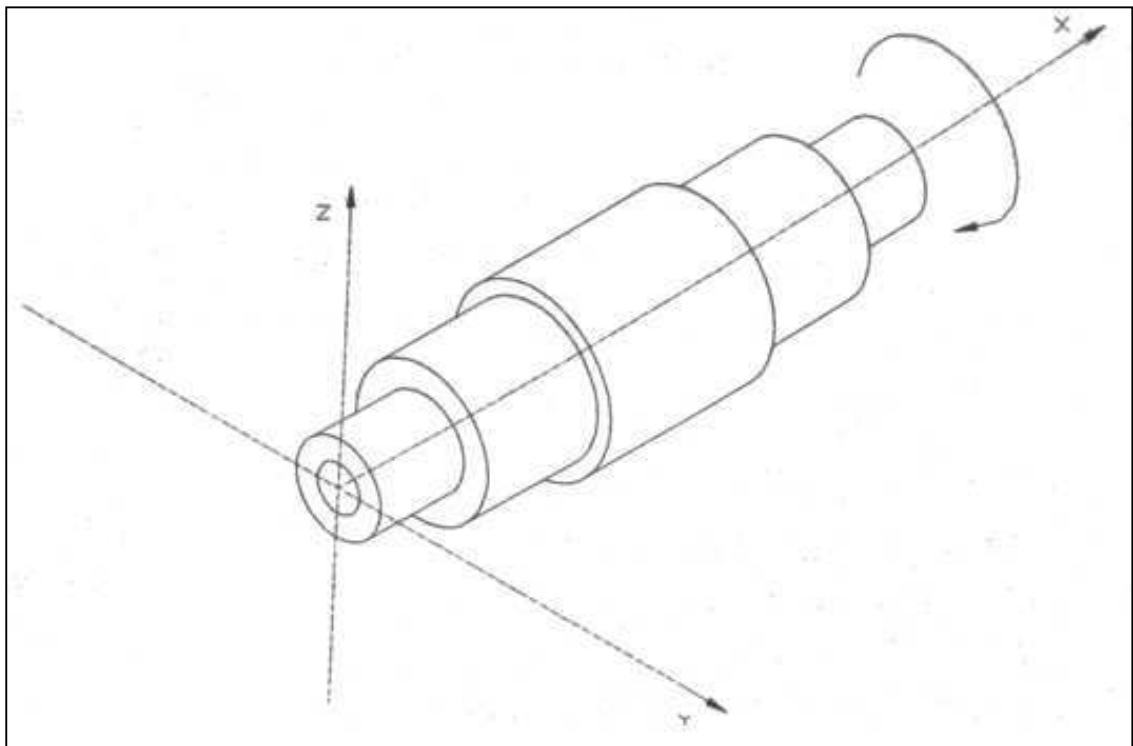


Figura 1.16

La figura 1.16 muestra como están distribuidos los ejes en el programa y, por tanto, cuáles son los planos XY y XZ, así como el sentido de giro positivo.

El programa viene acompañado de varios archivos y carpetas, los cuales deben mantener el orden dentro de su ordenador. Puede moverse el conjunto sin problemas, pero se recomienda no mover unos archivos sí y otros no, ya que esto podría hacer que el programa dejase de funcionar correctamente o que simplemente no funcionase. Dentro del archivo de Access se encuentran varias tablas de las que el programa toma los datos que necesite. El usuario puede alterar estas tablas a voluntad con tan solo entrar en el archivo, si bien se recomienda no hacerlo. Tan solo podría ser interesante alterar la tabla correspondiente a la biblioteca de materiales para añadir, modificar o eliminar algún material, aunque estas acciones también pueden llevarse a cabo desde dentro del propio programa. Por su parte, la función del archivo de Excel es servir de nexo entre este programa y Solid Edge, de manera que podamos tener dibujado el eje del problema con tan solo darle a un botón. En la carpeta Resultados se almacenarán por defecto como imágenes (si usted así lo desea) los diagramas que quiera guardar. Mientras que la carpeta Solid Edge contiene el archivo Solid Edge que podremos abrir desde este programa para ver el eje en 3D.

Es importante comentar que el archivo de Solid Edge podremos guardarlo, pero siempre mostrará el último eje que hayamos querido visualizar, a no ser que se corten los vínculos interpuestos entre las variables de Solid Edge y el archivo de Excel, una acción que no se recomienda en absoluto, pero de hacerse luego habrá que tener excesivo cuidado en utilizar la función "Guardar como" en lugar de la de "Guardar", ya que esta última haría que ya no pudiesen visualizarse más ejes a partir de este programa. No obstante, por si esto llegase a pasar, se suministra una copia de seguridad del archivo de Solid Edge con el fin de arreglar rápidamente el problema (bastaría con sustituir el archivo Eje.par por esta copia de seguridad en la carpeta Solid Edge).

A continuación se comentarán las particularidades de cada ventana con la que cuenta este programa.

- Inicio



Figura 1.17

La pantalla de inicio (Figura 1.17) no necesita muchas explicaciones. Tan sólo dispone de 2 botones. El botón "Instrucciones" abre este mismo apartado de la memoria mientras que el de "Programa" da paso a la siguiente ventana.

- Medidas

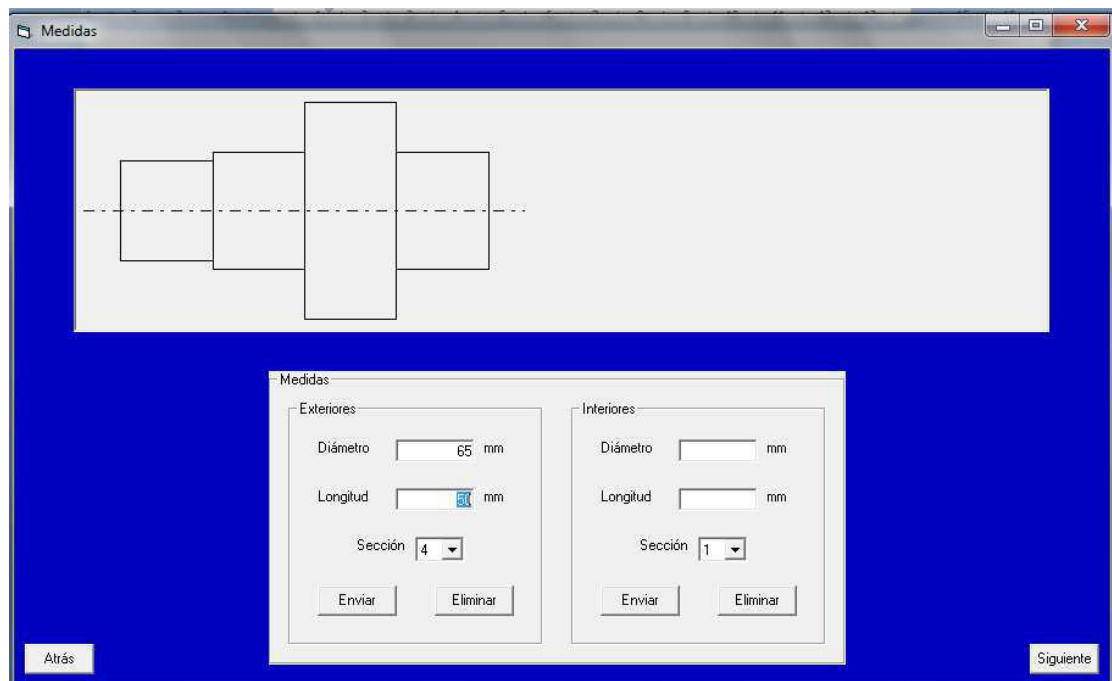


Figura 1.18

Esta ventana (Figura 1.18), como su propio nombre indica, es la encargada de que se puedan añadir las medidas del eje. Para ello, bastará con introducir los datos (en

milímetros) de una sección y pulsar el botón “Enviar”. Acto seguido, el programa se encargará de dibujar, dicha sección, en el recuadro superior. Mientras no se añada una sección exterior, no será posible añadir secciones interiores, puesto que carece de sentido. Así pues, una vez añadida, una o varias secciones exteriores, se podrán añadir las interiores del mismo modo, en su recuadro correspondiente. Para borrar alguna sección tan solo hay que seleccionarla y pulsar el botón “Eliminar”. Una vez añadida una sección, interior o exterior, el programa preguntará si se desean añadir más. Pulsando en sí, se incrementará el número de secciones y se podrán introducir los datos de ésta última.

El programa posee algunos mecanismos de defensa para evitar errores que serán mostrados en mensajes auxiliares para que el usuario los perciba. Por ejemplo, no será posible dibujar una sección si no se introducen los valores del diámetro y la longitud, o si al menos uno de esos valores es cero. O en el caso de las secciones interiores, si existe un dato que la sitúe fuera de las exteriores. Además se han bloqueado las casillas en las que se introducen los datos y en ellas sólo se podrán escribir números y una única coma (o punto; ya que las dos teclas van a escribir un punto) para todas las ventanas del programa.

Una vez añadidas todas las secciones se deberá pulsar el botón “Siguiente” para continuar dibujando el eje. Si no se ha dibujado ninguna sección, no se permitirá avanzar.

- Redondeos en cambios de sección

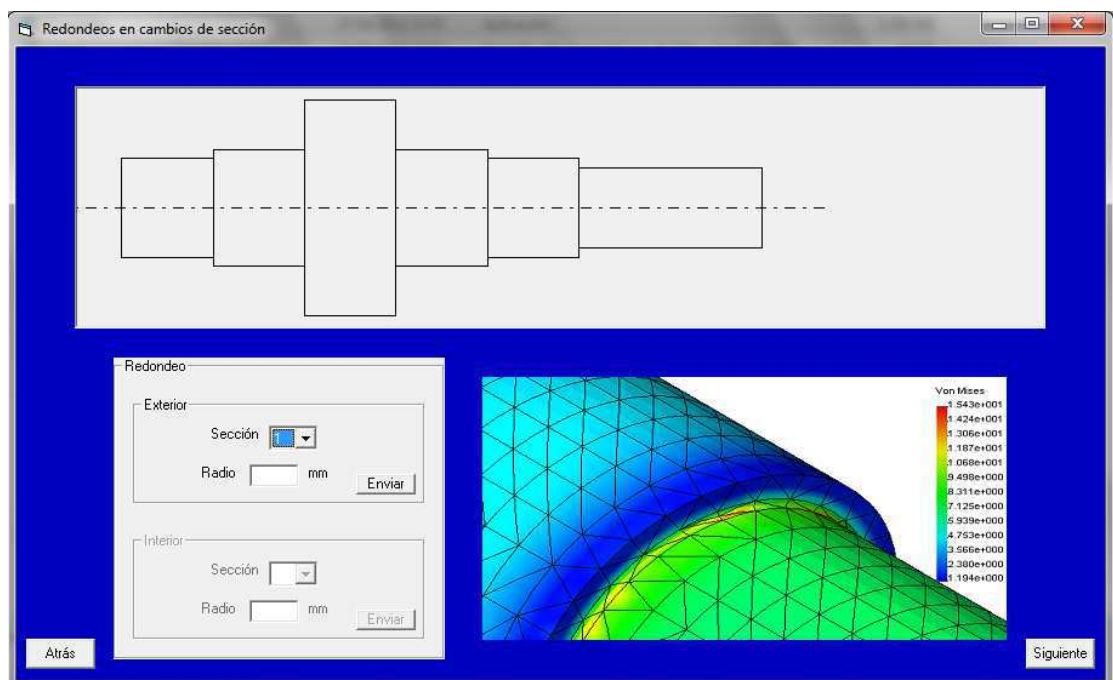


Figura 1.19

Esta ventana (Figura 1.19) aparecerá cuando el eje tenga más de una sección exterior, o bien, más de una interior. De cualquier otro modo, no tendría sentido alguno; no obstante, casi todos poseen más de una sección. En este caso, el número de la flechita será el correspondiente al cambio de sección, es decir, al final de la sección del mismo dígito. Si el eje posee una sección (exterior o interior), no se podrá

manipular la parte de esta ventana correspondiente a ese tipo; solamente la consecuente al otro. Una vez dicho todo esto, el programa dibujará el radio de acuerdo una vez sea introducido su valor y pulsado el botón “Enviar”. Si el valor escrito es mayor que la diferencia de los radios de las secciones contiguas, se mostrará un mensaje indicando el error. Por contra, si el valor entra dentro de los márgenes automáticamente será seleccionado el siguiente cambio de sección para que introduzcamos su radio de acuerdo.

- Chaveteros

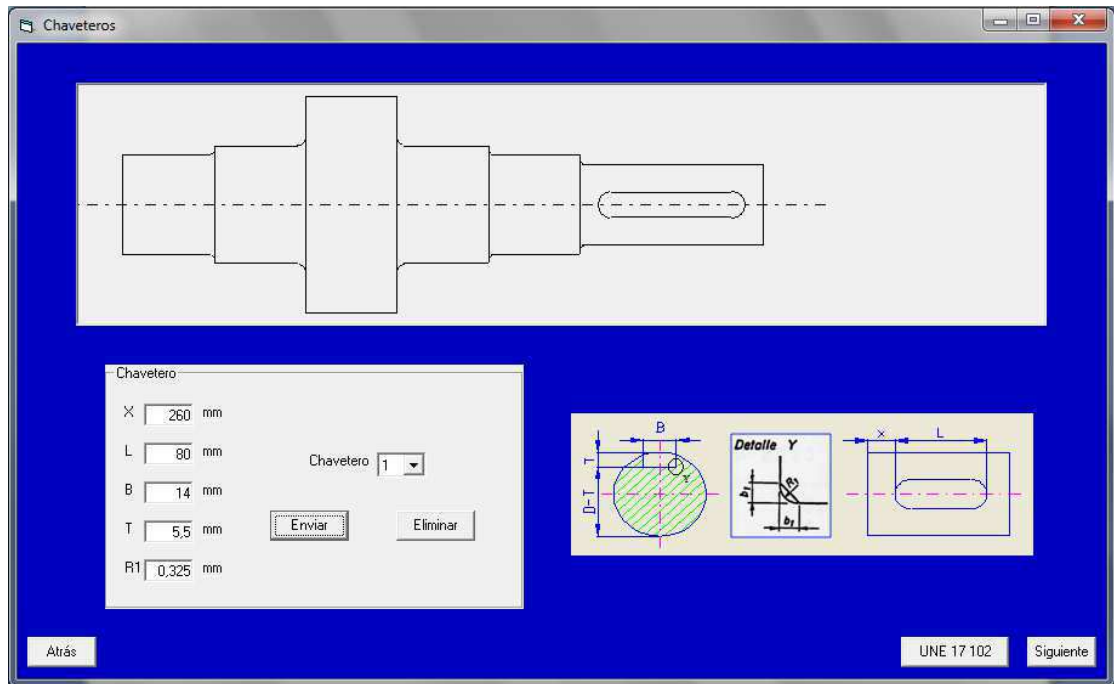


Figura 1.20

En esta ventana (Figura 1.20) se introducirán los chaveteros de que disponga el eje. En su parte inferior derecha existe una imagen de un chavetero que ayudará al usuario a entender a qué medidas hace referencia cada letra. No obstante, cabe destacar que la medida X será siempre respecto al inicio del eje. Una vez añadida esta medida el programa detecta el diámetro del eje que le corresponde y completa el resto de medidas en base a la norma UNE 17102, no siendo estos valores definitivos ni mucho menos, si no que queda a voluntad del usuario el cambiarlos. Se utilizan chavetas tipo B de la norma UNE 17102.

Con el fin de evitar errores, se deberán añadir los chaveteros en orden ascendente de esta medida (entiéndase de izquierda a derecha del dibujo del eje). En función del valor de X y de L, el programa puede mostrar algún mensaje: si llega hasta la siguiente sección, si realmente empieza al principio de una sección, o termina al final de ésta... También nos recordará que la profundidad y la anchura del chavetero deben ser inferiores al diámetro de la sección si alguno de los dos es superior. Si queremos borrar un chavetero bastará con seleccionarlo y pulsar el botón "Eliminar".

El botón “UNE 17 102”, llevará al usuario a una ventana en la que se recoge la norma citada, con la intención de ayudar a obtener el chavetero más adecuado.

- Chaveteros Normalizados UNE 17102

Chaveteros Normalizados UNE 17 102

UNE 17 102		Chavetas Paralelas Serie normal				UNE 17 102
Diámetro del eje		Ancho	Profundidad	Chañán		Longitud
d		b	T	R ₁		l
más de	hasta			Mínimo	Máximo	de
6	8	2	1,2	0,08	0,16	6
8	10	3	1,8	0,08	0,16	6
10	12	4	2,5	0,08	0,16	8
12	17	5	3	0,16	0,25	10
17	22	6	3,5	0,16	0,25	14
22	30	8	4	0,16	0,25	18
30	38	10	5	0,25	0,40	22
38	44	12	5	0,25	0,40	28
44	50	14	5,5	0,25	0,40	36
50	58	16	6	0,25	0,40	45
58	65	18	7	0,25	0,40	50
65	75	20	7,5	0,40	0,60	56
75	82	22	9	0,40	0,60	63
85	95	25	9	0,40	0,60	70
95	110	28	10	0,40	0,60	80

Diagramas de chaveteros: Tipo B, Detalle Y, y vistas de perfil y planta.

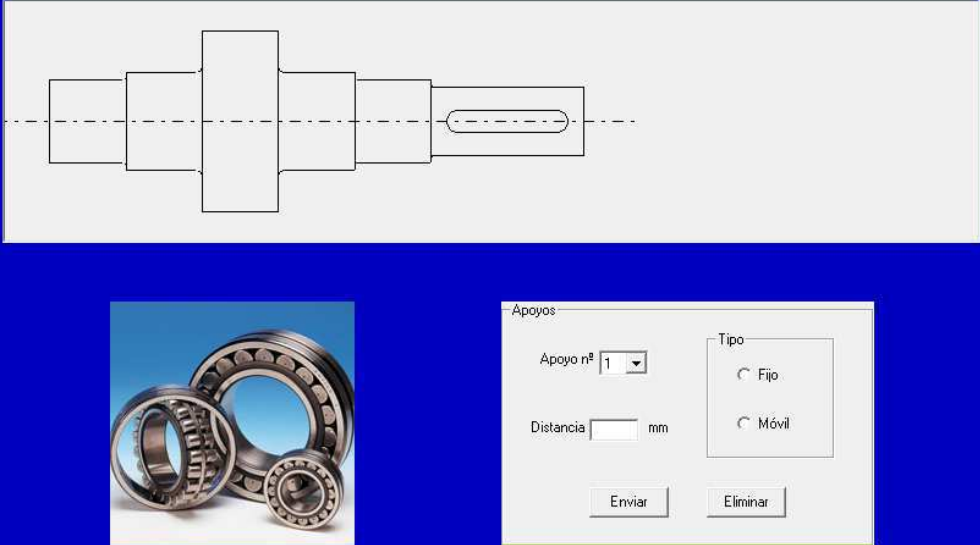
Cerrar

Figura 1.21

Esta ventana (Figura 1.21) es meramente informativa a fin de que el usuario pueda consultar la norma UNE 17102 sin falta de tenerla a mano.

- Apoyos

Apoyos



Apoyo nº

Tipo: ☐ Fijo ☐ Móvil

Distancia mm

Figura 1.22

En esta ventana (Figura 1.22) se permitirá añadir los apoyos correspondientes. O más bien, las distancias a las que se encuentran y el tipo de apoyo del que se trate: fijo o móvil. Al final y una vez conocidas las reacciones sobre éstos, será el usuario el que decida qué rodamientos le van mejor al eje.

Del mismo modo que en la ventana anterior los elementos se introducirán por orden ascendente escribiendo la distancia oportuna (respecto al inicio del eje), indicando el tipo de apoyo y pulsando el botón “Enviar”. El programa avisará si un rodamiento quedase fuera del eje debido a la introducción de una distancia superior a la longitud de eje, así como, en el caso de repetir una distancia, de que en ese lugar ya hay colocado un apoyo. Como en el resto de las ventanas para eliminar un apoyo bastará con seleccionarlo y pulsar el botón “Eliminar”.

- Elementos de transmisión

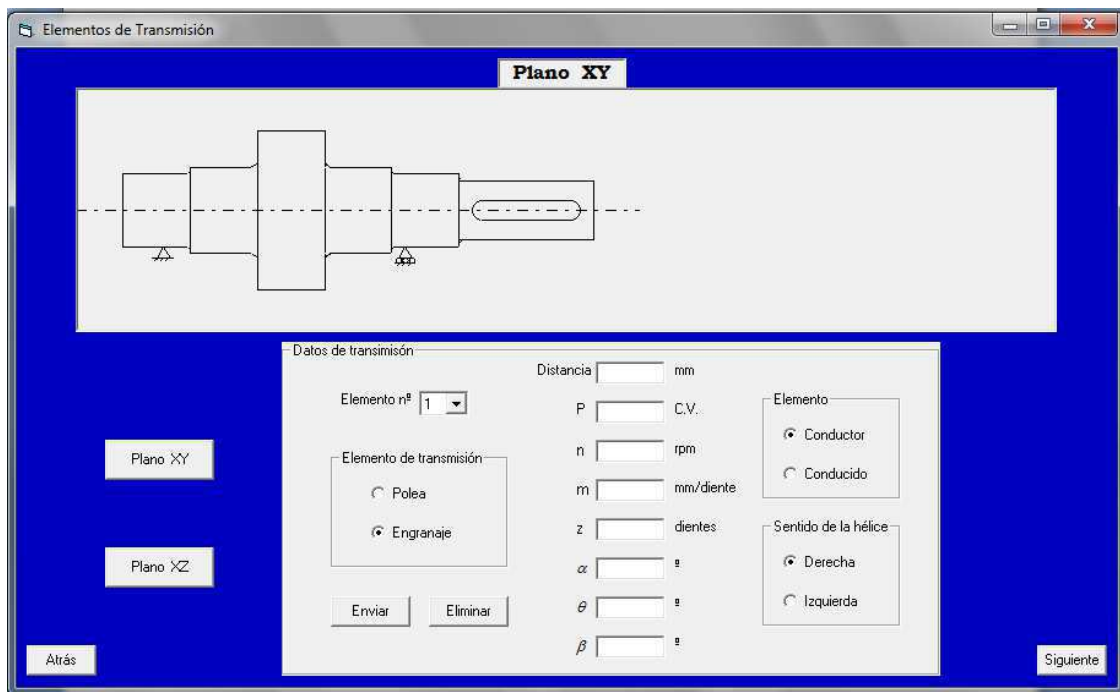


Figura 1.23

Esta ventana (Figura 1.23) es la correspondiente a los elementos de transmisión. Se podrán añadir 2 tipos de elementos: engranajes o poleas, ya que son los más usuales. Nuevamente, los elementos se introducirán utilizando el mismo criterio que en anteriores pantallas. Los botones “Plano XY” y “Plano XZ” permitirán al usuario ver en el recuadro superior el plano que desee. La casilla correspondiente a la potencia transmitida (P), así como la del número de revoluciones (n), se escribirán sólo para el primer elemento, ya que son valores comunes a todos ellos. La distancia y el ángulo theta aparecerán indistintamente para poleas y engranajes. El ángulo theta es el ángulo comprendido entre el eje Y positivo (con sentido hacia el eje Z positivo) y el punto donde se produce el contacto entre los engranajes, o la unión de los centros de las poleas; por tanto, este ángulo podrá ser como máximo de 360°. El resto de la características del elemento variarán al tratarse de un tipo u otro. Si se trata de un engranaje el programa requerirá, además de los datos ya mencionados, el módulo, el

número de dientes, el ángulo de presión y el ángulo de inclinación de la hélice. Asimismo, se deberá especificar en los recuadros de la derecha si el elemento es conductor o conducido y el sentido de la hélice. Si el ángulo de inclinación es cero, es decir, si el engranaje es recto, es indistinto elegir izquierda o derecha en el sentido de la hélice.

Si se desea añadir una polea habrá que seleccionarla ya que, por defecto, aparecerá seleccionada la opción de engranaje. Al hacerlo, si no hay ninguna polea añadida al eje, aparecerá un mensaje explicando al usuario que cuando se realiza una transmisión por medio de poleas, la fuerza transmitida al eje es un múltiplo de la tensión de la cuerda. Por ese motivo, se deberá añadir en la casilla inferior (t) el coeficiente multiplicador, que normalmente se encuentra entre 2 y 4. A parte de este dato, el programa precisará la distancia a la que se encuentra la polea (como siempre, desde el inicio del eje), así como el radio de ésta. Como en ventanas anteriores, el software indicará si nos dejamos de añadir algún dato, o si añadimos alguno que no puede ser. Cabe destacar que el número de dientes de un engranaje no puede ser inferior a 14, ya que éste es límite práctico para evitar la penetración al tallarlo.

- Resultados

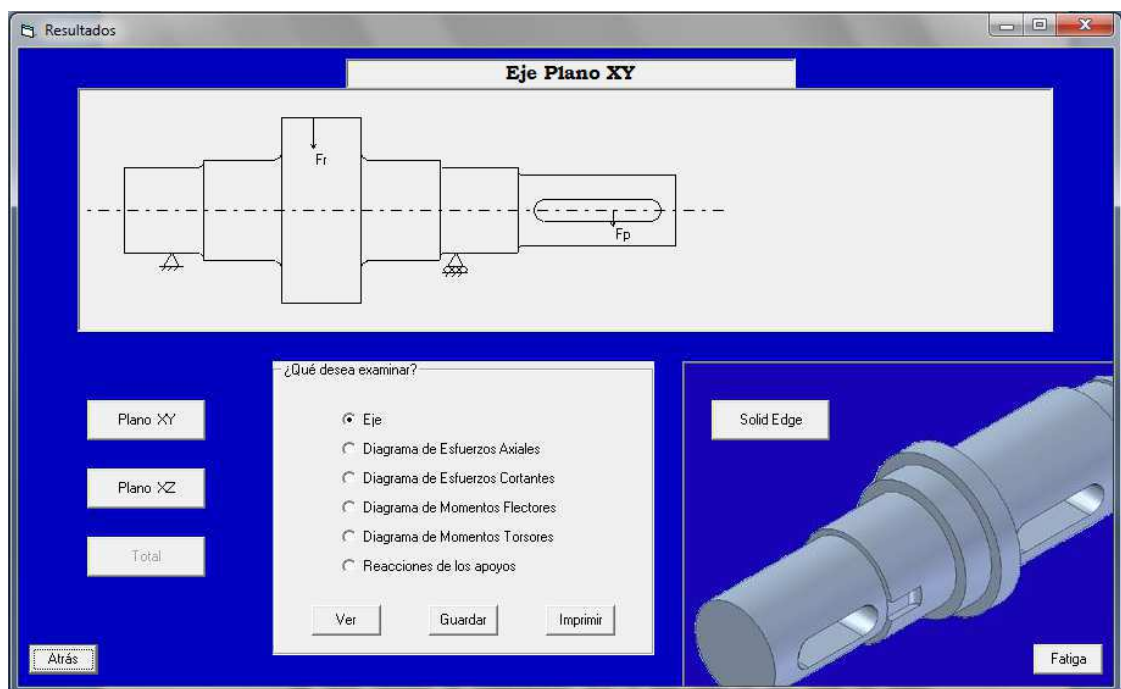


Figura 1.24

En esta primera ventana de resultados (Figura 1.24) el programa presentará los diferentes diagramas disponibles así como las reacciones en los apoyos. El usuario deberá seleccionar una de las opciones y pulsar el botón "Ver". Los botones "Plano XY", "Plano XZ" y "Total", permiten cambiar de un plano a otro, o bien, ver los diagramas totales.

El botón "Guardar" permite guardar una imagen de la ventana tal y como se encuentre en ese momento. Por defecto, estas imágenes se almacenarán en la carpeta

"Resultados" que acompaña al programa, aunque el usuario será quien elija su destino final dentro del ordenador.

Por su parte, el botón "Imprimir" manda que se imprima la ventana actual a la impresora predeterminada en el ordenador.

Si se tiene instalado el programa Solid Edge en el ordenador, el botón "Solid Edge" abrirá el eje cuyos datos ha ido introduciendo el usuario en dicho programa en el módulo pieza.

Finalmente, el botón "Fatiga" da paso a la siguiente fase de este programa: poder calcular la vida a fatiga del eje.

- Fatiga

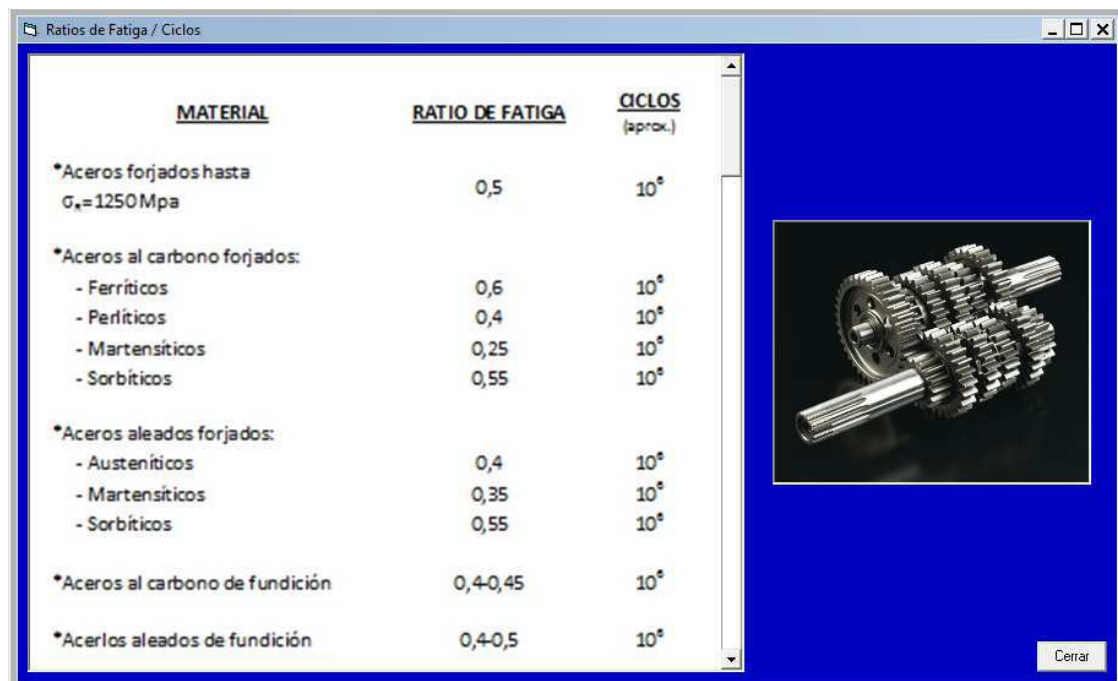
Figura 1.25

En esta ventana (Figura 1.25) deberá escogerse la sección a estudiar y añadir sus datos correspondientes. Existe una librería de materiales donde con sólo escoger uno el programa nos proporciona todas sus constantes. El usuario tiene potestad para alterar las constantes suministradas por el programa, así como para añadir todas él mismo. Una vez completados todos los datos pulsando el botón "Calcular" el programa abrirá 2 nuevas ventanas, una para la teoría S-N y otra para el modelo e-N mostrando un mensaje, el cual aconsejará al usuario qué camino tomar.

En la parte derecha podremos añadir, modificar o eliminar materiales de la biblioteca.

El botón "Ratios/Ciclos" abre una nueva ventana comentada a continuación.

- Ratios de fatiga



MATERIAL	RATIO DE FATIGA	CICLOS (aprox.)
*Aceros forjados hasta $\sigma_s=1250$ Mpa	0,5	10^6
*Aceros al carbono forjados:		
- Ferríticos	0,6	10^6
- Perlíticos	0,4	10^6
- Martensíticos	0,25	10^6
- Sorbíticos	0,55	10^6
*Aceros aleados forjados:		
- Austeníticos	0,4	10^6
- Martensíticos	0,35	10^6
- Sorbíticos	0,55	10^6
*Aceros al carbono de fundición	0,4-0,45	10^6
*Aceros aleados de fundición	0,4-0,5	10^6

Figura 1.26

Esta ventana (Figura 1.26) es meramente informativa a fin de que el usuario pueda consultar los ratios de fatiga de varios materiales así como a cuántos ciclos corresponde el límite de fatiga.

- Resultados S-N

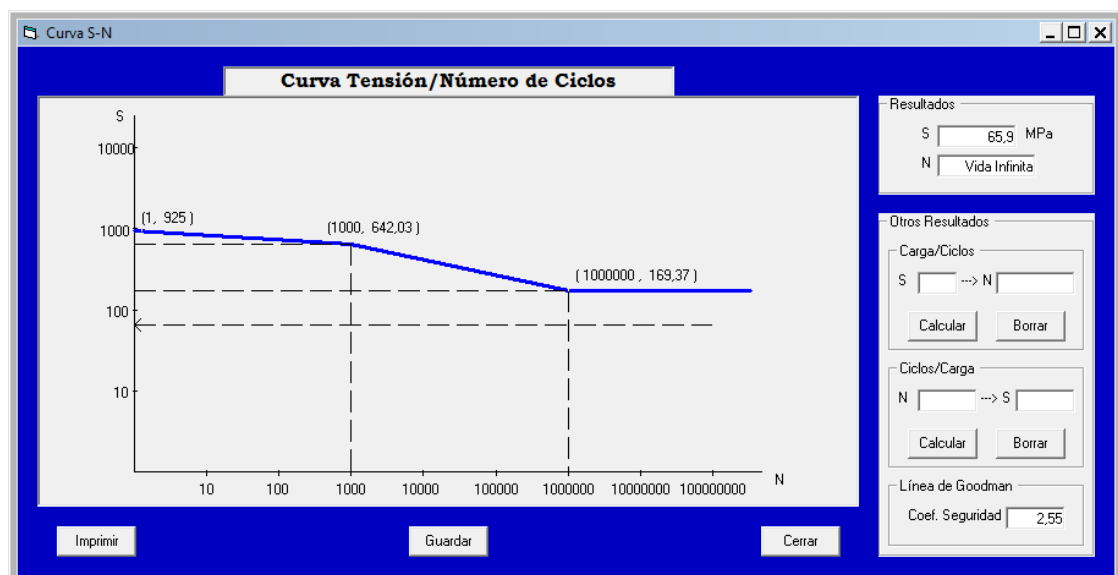


Figura 1.27

En esta ventana (Figura 1.27) se muestra la vida a fatiga según la teoría S-N. En la parte superior derecha se nos muestra la tensión y el número de ciclos (en este caso se tendrá vida infinita) que aguantará la sección estudiada del eje. Debajo podremos

calcular los ciclos correspondientes a una carga, o la carga correspondiente a unos ciclos. Estos puntos se dibujarán en el diagrama de la izquierda al calcularse. Abajo del todo se muestra el coeficiente de seguridad para vida infinita según la línea de fallo de Goodman.

Los botones "Imprimir" y "Guardar" funcionan idénticamente a los de la ventana "Resultados". Por su parte el botón "Cerrar" cierra la ventana sin cerrar el programa.

- Resultados ϵ -N

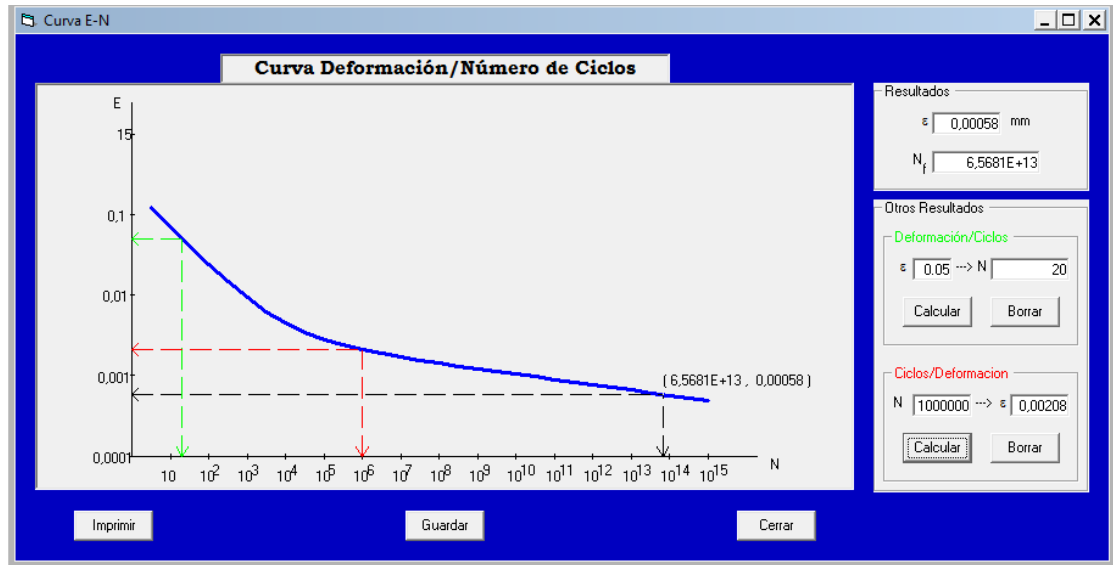


Figura 1.28

En esta ventana (Figura 1.28) se muestra la vida a fatiga según la teoría ϵ -N. En la parte superior derecha se nos muestra la deformación y el número de ciclos que aguantará la sección estudiada del eje. Debajo podremos calcular los ciclos correspondientes a una deformación, o la deformación correspondiente a unos ciclos. Estos puntos se dibujarán en el diagrama de la izquierda al calcularse.

Los botones "Imprimir" y "Guardar" funcionan idénticamente a los de la ventana "Resultados". Por su parte el botón "Cerrar" cierra la ventana sin cerrar el programa.

1.9. COEFICIENTE DE SEGURIDAD

Los cálculos de fatiga son sólo aproximados. A pesar de ello, deben conducir a estimaciones seguras del comportamiento real si no va a ser posible realizar ensayos y, en el caso más que deseable de que éstos se realicen, el cálculo debe ser suficientemente correcto como para poder minimizar realmente su número.

Desafortunadamente, el establecimiento de un nivel de error en los cálculos de fatiga, entendiendo como error la discrepancia entre la solución obtenida y la realidad física, es de por sí una tarea difícil, por no decir imposible en un sentido estricto, antes de la realización de ensayos y en ausencia de experiencia previa.

Un camino alternativo a la valoración del error es el tratamiento pormenorizado de todas sus componentes, agrupadas en dos grandes categorías: las incertidumbres, o fuentes de discrepancia asociadas a parámetros cuyo valor no puede cuantificarse con precisión, y los errores propiamente dichos, entendidos como fuentes de discrepancia originadas durante el proceso de cálculo.

El concepto clásico de coeficiente de seguridad debe ser convenientemente reinterpretado y definido de una forma racional, como una medida de los niveles de incertidumbre y error remanentes en cada paso del análisis. De este modo deja de ser una medida arbitraria, basada en resultados empíricos, para pasar a ser una herramienta cuantitativa fundamentada en factores claramente establecidos.

Prácticamente cualquier análisis debe ser realizado admitiendo cierto nivel de incertidumbre, entendiendo por este término aquellas faltas de definición y/o conocimiento existentes en la formulación del problema y en los parámetros físicos que intervienen. Es de destacar que la necesidad de manejar niveles altos de incertidumbre ha ido en aumento con la introducción del concepto de ingeniería concurrente, puesto que la cantidad de información totalmente definida en cada fase del proceso ha disminuido de forma notable.

A continuación se nombran algunas fuentes de incertidumbre típicas:

- Incertidumbres asociadas a las condiciones reales de uso
- Incertidumbres asociadas a los materiales y al proceso de fabricación
- Incertidumbres de modelización matemática de los fenómenos físicos
- Incertidumbres asociadas a la presencia de fenómenos no simulables

Las incertidumbres pueden clasificarse según su naturaleza tal como se expone a continuación.

- Incertidumbres estadísticas

Tienen su origen en la naturaleza estadística de parámetros físicos que intervienen en el fenómeno de la fatiga. Pueden caracterizarse asignando una adecuada

distribución de probabilidad a cada parámetro. A partir de ellas se puede obtener la distribución de probabilidad del resultado del análisis.

En una valoración resistente como es un análisis de fatiga, las distribuciones de probabilidad de la sollicitación y de la resistencia permiten, mediante la teoría de la interferencia estadística, fijar una probabilidad de fallo a través de la introducción de un coeficiente de seguridad estadístico o de confiabilidad.

Supongamos que todas las variables de problema son perfectamente conocidas y que tanto la resistencia del material como el valor característico de la sollicitación utilizado en la valoración resistente (valor máximo de la tensión local, tensión alterna, etc.), responden a una distribución estadística del tipo normal de parámetros también conocidos. Esto equivale a decir que todos los posibles valores de la resistencia se distribuyen normalmente alrededor de un valor medio μ_r con una dispersión σ_r , mientras los posibles valores de la sollicitación lo hacen en torno a su valor medio μ_s , con una dispersión σ_s .

En estas condiciones el fallo sucederá cuando sobre un mismo componente coincidan una resistencia y una sollicitación, tales que la última supere a la primera, o sea, cuando sus valores se encuentren en la zona de interferencia de las dos distribuciones.

Según este planteamiento no se puede hablar de fallo o no fallo, sino de probabilidad de fallo.

- Incertidumbres difusas

Las incertidumbres difusas tienen un origen muy distinto a la mera variabilidad estadística, pudiendo ser debidas a los siguientes factores:

- ✓ La complejidad del fenómeno, el conocimiento que se tiene de él, que puede ser impreciso, incompleto y/o subjetivo.
- ✓ La evolución futura, previsible sólo en cierta medida.
- ✓ La ambigüedad del lenguaje (escrito, oral o gráfico), que puede no estar claramente definido o ser inexacto.
- ✓ La mera falta de información.

Todas estas incertidumbres deben ser identificadas, evaluadas y representadas mediante una medida de nivel global de incertidumbre de la información disponible. En dicha representación debe considerarse la desigual transmisión de cada incertidumbre parcial hasta el resultado final, o dicho en términos más rigurosos, la sensibilidad del resultado a las incertidumbres de los datos.

- Análisis y tratamiento de los errores

Las incertidumbres suelen presentarse en los inicios del proceso de simulación, especialmente durante las fases de idealización y modelización. A partir de este punto los errores empiezan a tomar un papel preponderante en la generación de las discrepancias entre la realidad y los resultados del cálculo.

Al igual que las incertidumbres, los errores tienen diversos orígenes y se acumulan de una etapa a la siguiente. Dichos errores deben ser identificados, evaluados y minimizados en cada etapa del análisis. El efecto acumulado conjunto de los errores residuales irreducibles debe pasar a formar parte del coeficiente de seguridad global mediante la introducción de un coeficiente de seguridad parcial que refleje este efecto.

1.10. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Como conclusión primera y principal de este proyecto, es posible afirmar que el programa constituye una aplicación útil a la hora de resolver, tanto los diagramas de un eje, como su vida a fatiga. Pese a no contemplar todas las configuraciones posibles para un eje, este programa sirve para dar rapidez y precisión en la búsqueda de una solución para muchos problemas.

Se ha hablado de precisión. Si bien es cierto que el programa garantiza una buena precisión, es obvio, que a pesar de hacerse con un ordenador, la solución no va a ser exacta al 100%. Dentro del propio programa también se comenten errores de exactitud, menores que si abordáramos el problema a mano, pero errores al fin y al cabo. Por ejemplo, las operaciones trigonométricas, Visual Basic 6.0 las hace en radianes, por lo que ha habido que convertir los grados a radianes, cometiendo así, un minúsculo error. Pero muchos pocos hacen un mucho; y la suma de varios errores, por minúsculos que sean, crea un error mayor que, aunque muy aceptable, es lógico mencionar. Aparte, claro está, de que los fallos inherentes al modelo de cálculo. Un ejemplo de esto serían las cargas producidas por los elementos de transmisión, que se han considerado como cargas puntuales, cuando en realidad serían cargas distribuidas. En el apartado anterior (apartado 1.9) se ha hecho una clasificación de los tipos de incertidumbres que podemos asociar a cualquier fenómeno.

Hablando de precisión es necesario evaluar los resultados obtenidos. En el tomo 3, correspondiente a cálculos, podemos encontrar un mismo problema resuelto de manera manual y mediante el programa objeto de este PFC. Puede observarse que, si bien los resultados se encuentran dentro del mismo orden de magnitud, hay una diferencia significativa entre ambos. Esto sucede debido a que la solución manual arrastra menos decimales en los resultados intermedios y, por lo tanto, la pérdida de precisión se va haciendo más patente conforme se avanza en el problema. Así pues, no sólo el programa es capaz de resolver el problema de una forma mucho más rápida, sino que además aporta mucha más precisión a los resultados que la solución manual, además de tener la confianza de que no se comenten los errores de cálculo a los que se está expuesto al resolver un problema a mano.

A pesar de que existe bastante diferencia entre la solución manual y la obtenida mediante el programa, no hay que olvidar la naturaleza estadística de la fatiga. Esto significa que la solución al problema no es un valor sino un intervalo. Por lo tanto, si tomamos la solución como tal, a pesar de que el centro del intervalo varía, la mayor parte de los intervalos se solapan, por lo que a fin de cuentas, la diferencia es menor de lo que parece en primera instancia.

Es evidente que no existe un método universal único para la predicción de la vida a fatiga de los componentes y estructuras mecánicos. En cada caso, el analista deberá escoger el más adecuado al problema en cuestión.

En líneas generales puede decirse que para vidas cortas, en las que se presenten deformaciones plásticas importantes en el fondo de la entalla, es preferible la utilización de la teoría ϵ -N; mientras que para vidas largas pueden obtenerse también buenos resultados a partir de la teoría S-N. No obstante, serán las cargas y el material del que esté

compuesto el eje, quienes definan qué camino tomar y, como ya se ha mencionado, el programa nos avisará de qué teoría es la idónea en el caso que atañe al usuario.

Para finalizar, cabe recordar que para obtener probabilidades de fallo inferiores al 10% es necesario recurrir al ensayo y a la experiencia en servicio, ya que única y exclusivamente utilizando el cálculo no es posible garantizarlo. Por tanto, lo ideal es combinar un método de cálculo adecuado con ensayos prácticos. Aplicar este tipo de criterio de diseño no es sólo una necesidad tecnológica sino también económica, teniendo en cuenta además, que siendo concienzudos en los cálculos es posible ahorrar mucho tiempo y dinero en la parte práctica, pudiendo llegar con el tiempo y la adquisición de experiencia a eliminarla en según qué casos.

1.11. BIBLIOGRAFÍA

- APRENDA VISUAL BASIC 6.0 COMO SI ESTUVIERA EN PRIMERO. J. García de Jalón, J. I. Rodríguez y A. Brazales. Escuela Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Navarra
- VISUAL BASIC 6.0 ORIENTADO A BASES DE DATOS. C. M. Rodriguez Bucarely. Twinsmaster Soft Corporation
- RESISTENCIA DE MATERIALES. M. Vazquez. Ed Noela
- TEORÍA DE LAS ESTRUCTURAS. S. P. Timoshenko. Ed Urmo
- ANÁLISIS DE FATIGA EN MÁQUINAS. Rafael Aviles. Ed Thomson
- METAL FATIGUE IN ENGINEERING. R.I. Stephen y otros. Ed Wiley Interscience
- DISEÑO EN INGENIERÍA MECÁNICA. J.E. Shigley. Ed McGraw-Hill
- FATIGUE-LIFE PREDICTION USING LOCAL STRESS-STRAIN CONCEPTS. D. Socie. Experimental Mechanics
- FUNDAMENTALS OF MODERN FATIGUE ANALYSIS. D. Socie, M.R. Mitchell y E.M. caulfield. College of Engineering, University of Illinois.
- ELEMENTOS DE MÁQUINAS. Hamrock, Bernard j. & Jacobson, Bo & Schmid, Steven R. Ed McGraw-Hill
- DISEÑO DE MÁQUINAS. R.L. Norton. Ed Prentice Hall
- FAILURE ANALYSIS AND PREVENTION. ASM Handbook, volumen 11
- FATIGUE AND FRACTURE. ASM Handbook, volumen 9
- ANÁLISIS DE FALLO DEL EJE DE UN AGITADOR PARA TRATAMIENTO DE AGUA. Ángela María Ceron, German Adolfo Charry y John Jairo Coronado. Revista Scientia et Technica, año XII, nº 30, mayo de 2006
- DESARROLLO DE UN MODELO CONSTITUTIVO PARA PROBLEMAS DE FATIGA TERMOMECAÁNICA ACOPLADA CON EFECTOS DE TAMAÑO VÍA LA MECÁNICA DEL DAÑO CONTINUO. Juan David Gómez. Revista Scientia et Technica, año XIII, nº 36, septiembre de 2007
- A CRITICAL ANALYSIS OF CRACK PROPAGATION LAWS. P. C. Paris y F. Erdogan. Trans, ASME, Vol 85, nº 4, 1963
- FATIGUE CRACK PROPAGATION. J. M. Barsom. Trans ASME, SEr 85, nº4, 1971
- STRESS CONCENTRATION FACTORS. R.E. Peterson. John Wiley y Sons, 1974

- SIZE EFFECTS IN FATIGUE OF NON-WELDED COMPONENTS. P.J. Haagenzen. Proc. 9th Int. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, (OMAE), Houston, Texas, 18-23 February 1990.
- FATIGA MULTIAXIAL EN EJES DE GRAN PAR. Ángel de Andrés Martínez. Anales de mecánica y electricidad, vol LXXVI, nº I, páginas 46-56
- INVESTIGACIÓN DEL FALLO DE UN EJE PIÑÓN CONECTADO A UNA EXTRUSORA DE DOBLE TORNILLO. Fernando Casanova y John Jairo Coronado. Dyna, año 77, nº 164, páginas 88-97
- FATIGA. Luis A. de Vedia y Hernán Svoboda. Ensayos Industriales 2002, Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
- FATIGUE CRACK GROWTH IN NOTCHED AND PLAIN SHAFTS SUBJECTED TO FATIGUE LOADING. K.D. Thompson y S.D. Sheppard. Fract. Mech., 1992
- MODOS DE FALLA COMUNES EN EJES. Edgar Espejo Mora y Juan Carlos Martínez. Departamento de Ingeniería y Mecatrónica de la Universidad de Colombia, 2008
- FATIGUE DAMAGE EVOLUTION IN AXIS. A. Plumtree y L. Shi. International Journal of Fatigue, vol. 24, 2002
- ESTUDIO TEMPORAL DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES EN UN EJE FISURADO. P. Rubio, B. Muñoz Abella y L. Rubio. XVIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica
- FATIGUE FAILURE OF A HOLLOW POWER TRANSMISSION SHAFT. S.K. Bhaumik*, R. Rangaraju, M.A. Parameswara, M.A. Venkataswamy y T.A. Bhaskaran, R.V. Krishnan. Revista: Engineering Failure Analysis
- FATIGUE ANALYSIS OF A WIND TURBINE POWER TRAIN. N. Ghareeb e Y. Radovic. Revista: Dewi Magazin, nº 35, agosto 2009
- UNDERSTANDING THE SURFACE FEATURES OF FATIGUE FRACTURES: HOW THEY DESCRIBE THE FAILURE CAUSE AND THE FAILURE HISTORY. N.W. Sachs y P.E. Sachs. Journal of Failure Analysis and Prevention - ASM International, Abril 2005
- ROTATING STEEL SHAFTS. Adam Mayers, Gary James y Peter Ford. ASPEC Engineering Technical Article, nº 2006-01
- <http://www.efatigue.com>

Pamplona, Julio de 2012

Mikel Calvo Fabo



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIÓN

Titulación :

INGENIERO INDUSTRIAL

Título del proyecto:

DESARROLLO DE SOFTWARE PARA CÁLCULO A
FATIGA DE EJES SEGÚN MODELOS S-N Y ϵ -N

- ANEXOS -

Alumno: Calvo Fabo, Mikel

Tutor: García Zabalegui, Francisco Javier

Pamplona, Julio de 2012

ÍNDICE

2.1. Ratios de Fatiga.....	1
2.2. Concentración de Tensiones.....	2
2.2.1. Cambios de Sección.....	2
2.2.2. Chaveteros.....	3
2.3. UNE 17 102.....	4
2.4. Características de Materiales.....	5

2.1. RATIOS DE FATIGA

<u>MATERIAL</u>	<u>RATIO DE FATIGA</u>	<u>CICLOS</u> (aprox.)
*Aceros forjados hasta $\sigma_s=1250\text{Mpa}$	0,5	10^6
*Aceros al carbono forjados:		
- Ferríticos	0,6	10^6
- Perlíticos	0,4	10^6
- Martensíticos	0,25	10^6
- Sorbíticos	0,55	10^6
*Aceros aleados forjados:		
- Austeníticos	0,4	10^6
- Martensíticos	0,35	10^6
- Sorbíticos	0,55	10^6
*Aceros al carbono de fundición	0,4-0,45	10^6
*Acerlos aleados de fundición	0,4-0,5	10^6
*Fundición gris, nodular o maleable	0,4	10^6
*Aleaciones de Cobre forjado:		
- Recocidas	0,35-0,45	10^6
- Trabajadas en caliente	0,25-0,35	10^6
*Aleaciones de Níquel forjadas	0,35-0,45	10^6
*Aleaciones de Titanio forjadas	0,4-0,55	10^7
*Aleaciones de Aluminio forjadas	0,35-0,4	10^6
*Aleaciones de Aluminio fundidas	0,25-0,35	10^6
*Aleaciones de Magnesio forjadas	0,25-0,4	10^6
*Aleaciones de Magnesio fundidas	0,2-0,3	10^6

2.2.CONCENTRACIÓN DE TENSIONES

2.2.1. Cambios de sección

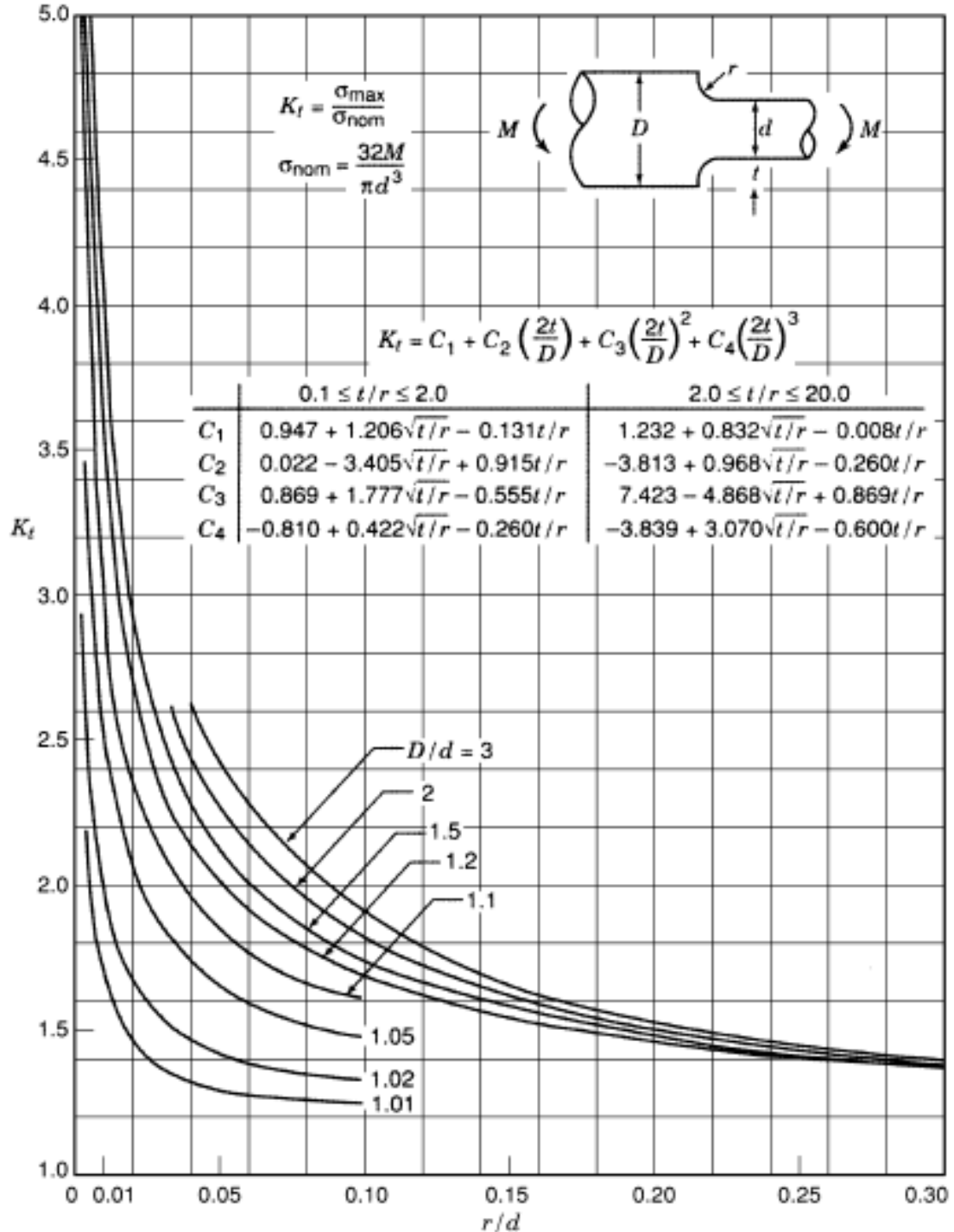


Chart 3.10 Stress concentration factors K_t for bending of a stepped bar of circular cross section with a shoulder fillet (based on photoelastic tests of Leven and Hartman 1951; Wilson and White 1973).

2.2.2. Chaveteros

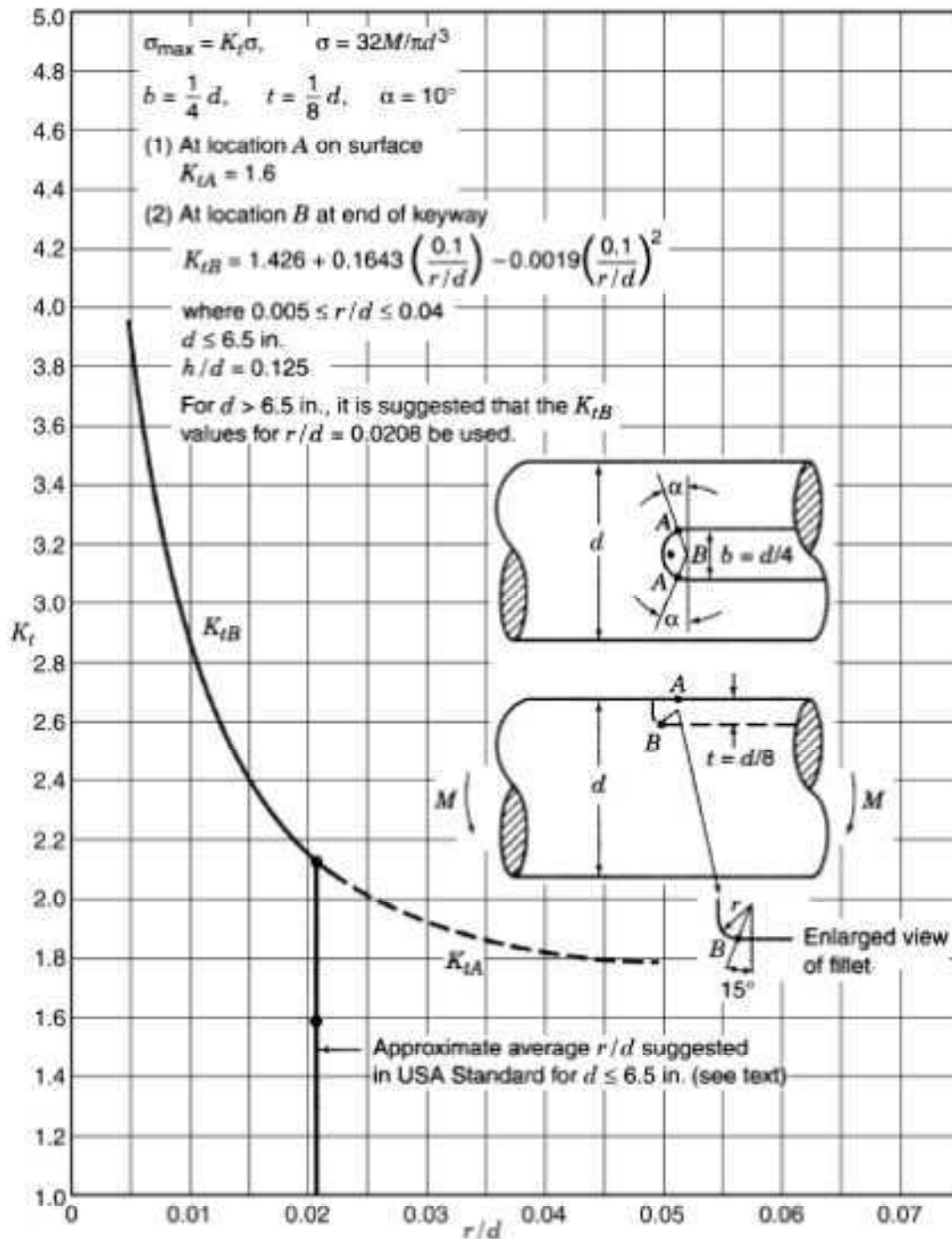


Chart 5.1 Stress concentration factors K_t for bending of a shaft of circular cross section with a semicircular end keyseat (based on data of Fessler et al. 1969).

2.3. UNE 17 102

UNE 17 102		Chavetas Paralelas Serie normal				UNE 17 102	
Diámetro del eje		Ancho	Profundidad	Chafilán		Longitud ⁽¹⁾	
d		b	T	R ₁		l	
más de	hasta			Mínimo	Máximo	de	a
6	8	2	1,2	0,08	0,16	6	20
8	10	3	1,8	0,08	0,16	6	36
10	12	4	2,5	0,08	0,16	8	45
12	17	5	3	0,16	0,25	10	56
17	22	6	3,5	0,16	0,25	14	70
22	30	8	4	0,16	0,25	18	90
30	38	10	5	0,25	0,40	22	110
38	44	12	5	0,25	0,40	28	140
44	50	14	5,5	0,25	0,40	36	160
50	58	16	6	0,25	0,40	45	180
58	65	18	7	0,25	0,40	50	200
65	75	20	7,5	0,40	0,60	56	220
75	82	22	9	0,40	0,60	63	250
85	95	25	9	0,40	0,60	70	280
95	110	28	10	0,40	0,60	80	320
110	130	32	11	0,40	0,60	90	360
130	150	36	12	0,70	1,00	100	400
150	170	40	13	0,70	1,00	100	400
170	200	45	15	0,70	1,00	100	400
200	230	50	17	0,70	1,00	100	400
230	260	56	20	0,70	1,00	100	400
260	290	63	20	1,20	1,60	100	400
290	330	70	22	1,20	1,60	100	400
330	380	80	25	2,00	2,50	100	400
380	440	90	28	2,00	2,50	100	400
440	500	100	31	2,00	2,50	100	400

⁽¹⁾ Las longitudes recomendadas son: 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 25, 28, 32, 36, 40, 45, 50, 56, 63, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180, 200, 220, 250, 280, 320, 360 y 400.

2.4. CARACTERÍSTICAS DE MATERIALES

TABLE A.2 Monotonic, Cyclic, and Strain-Life Properties of Selected Engineering Alloys^{a-c}

Material	Process Description	S_u MPa (ksi)	E GPa (ksi $\cdot 10^3$)	$\%RA$	S_y/S'_y MPa (ksi)	K/K' MPa (ksi)	n/n'	ϵ_f/ϵ_f'	σ_f/σ_f' MPa (ksi)	b	c
<i>Steel</i>											
1010	HR sheet	331 (48)	203 (29.5)	80	200/— (29)/—	534/867 (78)/(126)	0.185/0.244	1.63/0.104	—/499 —/(72)	—0.100	—0.408
1020	HR sheet	441 (64)	203 (29.5)	62	262/— (38)/—	738/1962 (107)/(284)	0.190/0.321	0.96/0.377	—/1384 —/(201)	—0.156	—0.485
1038 ^c	Normalized	582 (84)	201 (29.5)	54	331/342 (48)/(50)	1106/1340 (160)/(195)	0.259/0.220	0.77/0.309	898/1043 (130)/(151)	—0.107	—0.481
1038 ^c	Q&T	649 (94)	219 (31.5)	67	410/364 (60)/(53)	1183/1330 (172)/(193)	0.221/0.208	1.10/0.255	1197/1009 (174)/(146)	—0.097	—0.460
Man-Ten	HR sheet	510 (74)	207 (30)	64	393/372 (57)/(54)	—/786 —/(114)	0.20/0.11	1.02/0.86	814/807 (118)/(117)	—0.071	—0.65
RQC-100	HR sheet	931 (135)	207 (30)	64	883/600 (128)/(87)	1172/1434 (170)/(208)	0.06/0.14	1.02/0.66	1330/1240 (193)/(180)	—0.07	—0.69
1045	Annealed	752 (109)	—	44	517/— (75)/—	—/1022 —/(148)	—/0.152	0.58/0.486	—/916 —/(133)	—0.079	—0.520
1045	Q&T	1827 (265)	207 (30)	51	1689/— (245)/—	—/3371 —/(489)	0.047/0.145	0.71/0.196	—/2661 —/(386)	—0.093	—0.643
1090 ^c	Normalized	1090 (158)	203 (29.5)	14	735/545 (107)/(79)	1765/1611 (256)/(234)	0.158/0.174	0.15/0.250	—/1310 —/(190)	—0.091	—0.496
1090 ^c	Q&T	1147 (166)	217 (31.5)	22	650/627 (94)/(91)	1895/1873 (275)/(272)	0.165/0.176	0.24/0.700	—/1878 —/(273)	—0.120	—0.600
1141 ^c	Normalized	789 (115)	220 (32)	47	493/481 (72)/(70)	1379/1441 (200)/(209)	0.187/0.177	0.64/0.602	1117/1326 (162)/(192)	—0.103	—0.581
1141 ^c	Q&T	925 (134)	227 (33)	59	814/591 (118)/(86)	1205/1277 (125)/(185)	0.074/0.124	0.88/0.309	1405/1127 (204)/(164)	—0.066	—0.514
4142	Q&T	1413 (205)	207 (30)	48	1378/— (200)/—	—/2266 —/(387)	0.051/0.124	0.65/0.637	—/2143 —/(311)	—0.094	—0.761
4142	Q&T	1929 (280)	207 (30)	35	1722/— (250)/—	—/2399 —/(348)	0.048/0.094	0.43/0.331	—/2161 —/(314)	—0.081	—0.854
4340	HR	827 (120)	193 (28)	43	634/— (92)/—	—/1337 —/(194)	—/0.168	0.57/0.522	—/1198 —/(174)	—0.095	—0.563

4340	Q&T	1240 (180)	350	193 (28)	57	1178/— (171)/—	1580/1887 (229)/(274)	0.066/0.137	0.84/1.122	—/1917 —/(278)	—0.099	—0.720
4340	Q&T	1468 (213)	409	200 (29)	38	1371/— (199)/—	—/1996 —/(290)	—0.135	0.48/0.640	—/1879 —/(273)	—0.086	—0.636
0030	Cast	496 (72)	137	207 (30)	46	303/320 (44)/(46)	—/738 —/(107)	—0.136	0.62/0.280	750/655 (109)/(95)	—0.083	—0.552
8630	Cast	1144 (166)	305	207 (30)	29	985/682 (143)/(99)	—/1502 —/(218)	—0.122	0.35/0.420	1268/1936 (184)/(281)	—0.121	—0.693
304	Annealed	572 (83)	—	190 (27.5)	—	276/— (40)/—	—/2275 —/(330)	—0.334	—/0.174	—/1267 —/(184)	—0.139	—0.415
304	CD	951 (138)	327	172 (25)	69	744/— (108)/—	—/2270 —/(329)	—0.176	1.16/0.554	—/2047 —/(297)	—0.112	—0.635
Aluminum												
2024-T3	—	469 (68)	—	70 (10)	24	379/427 (55)/(62)	455/655 (66)/(95)	0.032/0.065	0.28/0.22	558/1100 (81)/(160)	—0.124	—0.59
5456-H311	—	400 (58)	95	69 (10)	35	234/— (34)/—	—/817 —/(118)	—0.145	0.42/1.076	—/826 —/(120)	—0.115	—0.797
7075-T6	—	579 (84)	—	70 (10)	34	469/524 (68)/(76)	827/— (120)/—	0.11/0.146	0.41/0.19	745/1315 (108)/(191)	—0.126	—0.52
A356	Cast	283 (41)	93	70 (10)	5.7	229/295 (33)/(43)	388/379 (56)/(55)	0.083/0.043	0.06/0.027	274/594 (40)/(86)	—0.124	—0.530
Others												
AZ91E-T6	Cast Mg.	318 (46)	—	45 (6.5)	13	142/180 (21)/(26)	639/552 (92)/(80)	0.137/0.184	0.14/0.089	356/831 (52)/(121)	—0.148	—0.451
Incon 718	Aged	1304 (189)	—	204 (29.5)	—	1110/— (161)/—	—/1986 —/(288)	—0.112	—/3.637	—/2295 —/(333)	—0.100	—0.894

^a These values do not represent final fatigue design properties. J1099 states, "Information presented here can be used in preliminary design estimates of fatigue life, the selection of materials and the analysis of service load and/or strain data."

^b "Technical Report on Low Cycle Fatigue Properties, Ferrous and Non-Ferrous Materials," SAE J1099, 1998 and 1975. With permission of the Society of Automotive Engineers.

^c M. L. Roessle and A. Fatemi, "Strain-Controlled Fatigue Properties of Steels and Some Simple Approximations," *Int. J. Fatigue*, Vol. 22, No. 6, 2000, p. 495.

Pamplona, Julio de 2012

Mikel Calvo Fabo



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIÓN

Titulación :

INGENIERO INDUSTRIAL

Título del proyecto:

DESARROLLO DE SOFTWARE PARA CÁLCULO A
FATIGA DE EJES SEGÚN MODELOS S-N Y ϵ -N

- CÁLCULOS -

Alumno: Calvo Fabo, Mikel

Tutor: García Zabalegui, Francisco Javier

Pamplona, Julio de 2012

ÍNDICE

3.1. Enunciado.....	1
3.2. Esfuerzos en el eje.....	2
3.2.1. Plano XY.....	2
3.2.2. Plano XZ.....	3
3.3. Diagramas de momentos flectores.....	4
3.3.1. Plano XY.....	4
3.3.2. Plano XZ.....	4
3.3.3. Total.....	5
3.4. Determinación de la teoría más propicia.....	6
3.5. Teoría ϵ -N.....	9
3.6. Teoría S-N.....	11
3.7. Resultados obtenidos con el programa.....	14
3.7.1. Teoría ϵ -N.....	14
3.7.2. Teoría S-N.....	14
3.8. Lista de símbolos.....	15

3.1. ENUNCIADO

El eje representado en la figura es el de entrada de un reductor de engranajes y gira a 200 rpm, transmitiendo 60 CV. El eje está accionado desde el motor mediante correas trapeciales. La puleya montada sobre el eje tiene 300 mm de diámetro. La tensión en las correas produce un tiro de $3T$, siendo T el esfuerzo tangencial en la periferia de la puleya. En el esquema se indican las posiciones de los apoyos, puleya y segundo eje del reductor. El eje es de acero 1010 laminado en caliente. Determinar la vida a fatiga para el cambio de sección situado a 190 mm del inicio del eje, según los modelos S-N y ϵ -N e indicar qué teoría es más propicia y por qué.

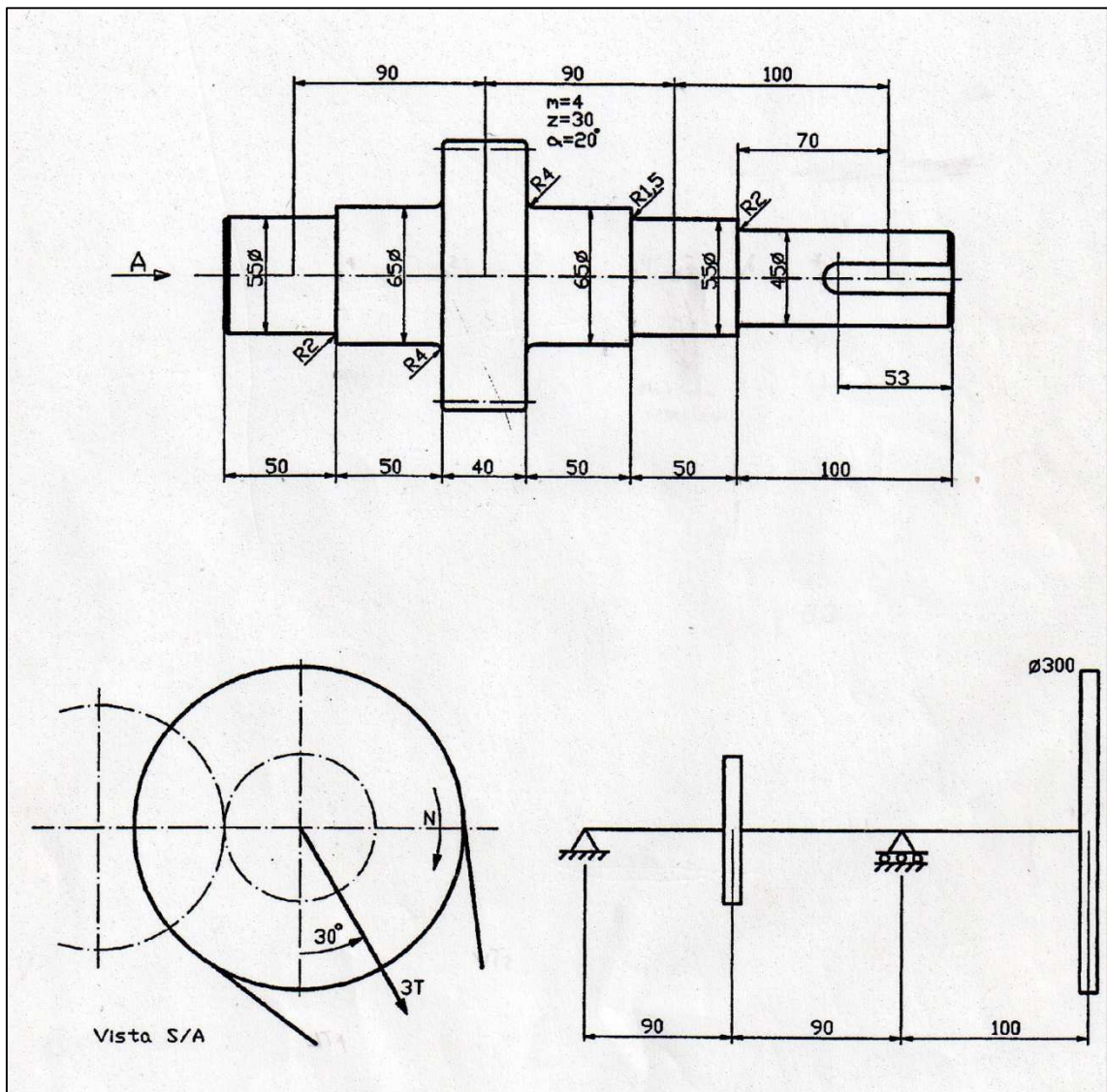


Figura 3.1

Nota: las constantes del Acero 1010 utilizadas en este documento pueden encontrarse en los Anexos (apartado 2.4)

3.2. ESFUERZOS EN EL EJE

Primeramente se calcula el momento torsor:

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{60 \cdot 75}{\frac{200}{60} 2\pi} = 214'859 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad (1)$$

La tensión en las correas de la polea será:

$$T = \frac{M_t}{r} = \frac{214'859 \cdot 1000}{300/2} = 1432'39 \rightarrow 3T = 4297'18 \text{ kg} \quad (2)$$

Para que no se produzcan aceleraciones el par del engranaje tendrá que ser igual al par de la polea, y por tanto, la fuerza tangencial de dicho engranaje valdrá:

$$F_t = \frac{M_t}{r} = \frac{214859}{4 \cdot 30/2} = 3580'98 \text{ kg} \quad (3)$$

Y su consecuente fuerza radial:

$$F_r = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha = 3580'98 \cdot \operatorname{tg} 20 = 1303'37 \text{ kg} \quad (4)$$

3.2.1. Plano XY

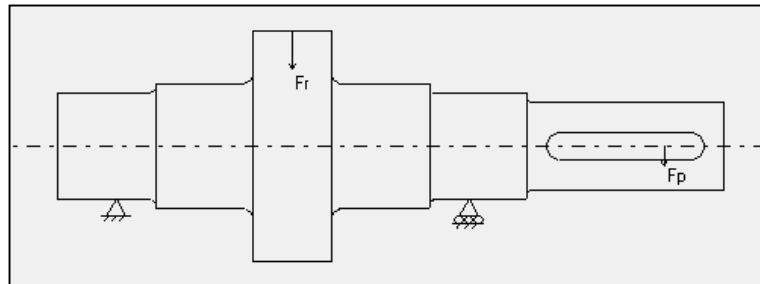


Figura 3.2

$$\sum M_C = 0 \rightarrow R_{Ay} \cdot 180 - 1303'37 \cdot 90 + 4297'18 \cdot \operatorname{sen} 30 \cdot 100 = 0 \quad (5)$$

$$R_{Ay} = -541'98 \text{ kg}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_{Ay} + R_{Cy} = 1303'37 + 4297'18 \cdot \text{sen}30 \quad (6)$$

$$R_{Cy} = 3993'94 \text{ kg}$$

3.2.2. Plano XZ

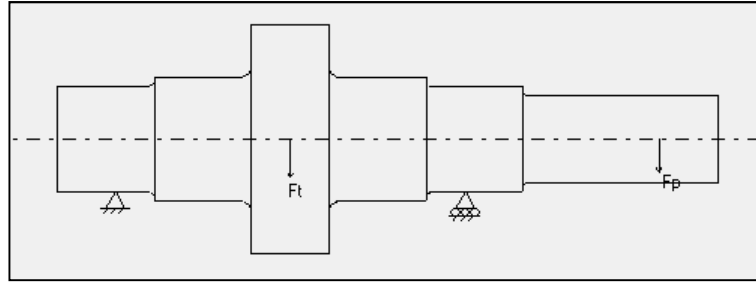


Figura 3.3

$$\sum M_C = 0 \rightarrow R_{Az} \cdot 180 - 3580'98 \cdot 90 + 4297'18 \cdot \cos 30 \cdot 100 = 0 \quad (7)$$

$$R_{Az} = -276'99 \text{ kg}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_{Az} + R_{Cz} = 3580'98 + 4297'18 \cdot \cos 30 \quad (8)$$

$$R_{Cz} = 7579'44 \text{ kg}$$

3.3. DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLECTORES

3.3.1. Plano XY

El diagrama de momentos flectores correspondiente al plano XY tendrá la forma que se muestra en la figura 3.4, siendo los valores importantes los siguientes:

$$M_A = M_D = 0 \quad (9)$$

$$M_B = R_{Ay} \cdot 90 = -541'98 \cdot 90 = -48778'2 \text{ kg} \cdot \text{mm} \quad (10)$$

$$M_C = R_{Ay} \cdot 180 - 1303'37 \cdot 90 = -214859'7 \text{ kg} \cdot \text{mm} \quad (11)$$

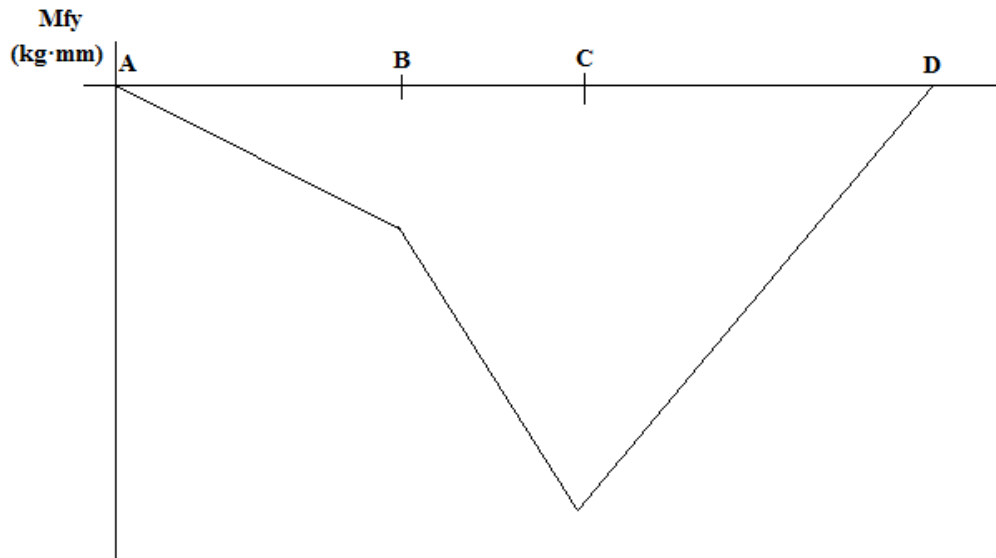


Figura 3.4

3.3.2. Plano XZ

El diagrama de momentos flectores correspondiente al plano XZ tendrá la forma que se muestra en la figura 3.5, siendo los valores importantes los siguientes:

$$M_A = M_D = 0 \quad (12)$$

$$M_B = R_{Az} \cdot 90 = -276'99 \cdot 90 = -24929'1 \text{ kg} \cdot \text{mm} \quad (13)$$

$$M_C = R_{Az} \cdot 180 - 3580'98 \cdot 90 = -372146'4 \text{ kg} \cdot \text{mm} \quad (14)$$

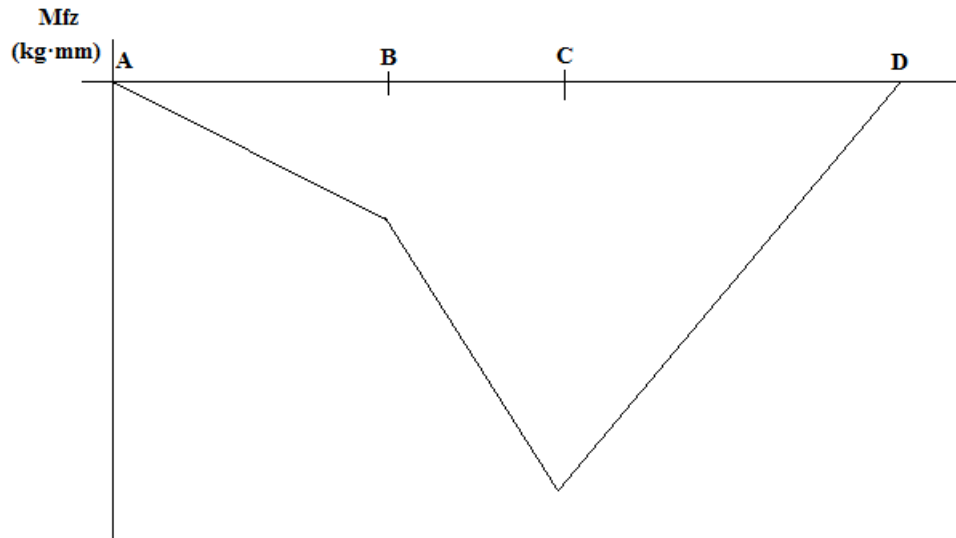


Figura 3.5

3.3.3. Total

El diagrama de momentos flectores totales tendrá la forma que se muestra en la figura 3.6, siendo los valores importantes los siguientes:

$$M_A = M_D = 0 \quad (15)$$

$$M_B = \sqrt{(-48778'2)^2 + (-24929'1)^2} = 54779'31 \text{ kg} \cdot \text{mm} \quad (16)$$

$$M_C = \sqrt{(-214859'7)^2 + (-372146'4)^2} = 429718'09 \text{ kg} \cdot \text{mm} \quad (17)$$

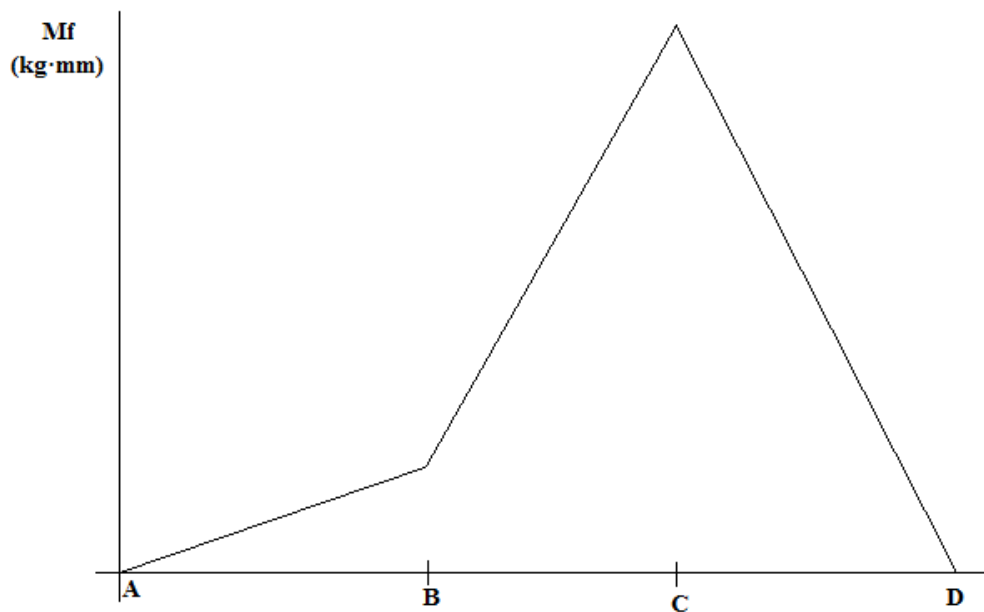


Figura 3.6

3.4. DETERMINACIÓN DE LA TEORÍA MÁS PROPICIA

La sección a estudiar dista 190 mm del inicio del eje y, por tanto, está situada entre los puntos B y C. Utilizando estos puntos e interpolando se obtiene el valor del momento flector en dicha sección.

$$M_{190mm} = 344505'88 \text{ kg} \cdot \text{mm} \quad (18)$$

Con el valor del momento flector es fácil calcular la tensión sufrida por el eje en esa sección:

$$S = \frac{32 \cdot M_{190mm}}{\pi \cdot d^3} = \frac{32 \cdot 344505'98}{\pi \cdot 55^3} = 21'09 \text{ kg/mm}^2 = 206'68 \text{ MPa} \quad (19)$$

La sección a estudiar representa un cambio de sección. Puede observarse que para calcular el valor de la tensión se ha cogido el menor diámetro de los dos que componen dicho cambio de sección. De esta manera se actúa por el lado de la seguridad.

Al tratarse de un eje la tensión obtenida corresponde a la tensión alterna, siendo la tensión media igual a cero.

$$S_a = 206'68 \text{ MPa} \quad (20)$$

$$S_m = 0 \text{ MPa} \quad (21)$$

Esta tensión es la tensión nominal. Ahora se calculará la tensión máxima en la entalla y, de esta forma, determinaremos qué teoría habrá que seguir.

Al ser la tensión media igual a cero, la tensión máxima y mínima tendrán la misma amplitud pero distinto signo (una será de tracción y la otra de compresión). Por tanto la tensión nominal máxima coincide con la tensión alterna calculada en la ecuación 20.

Utilizando la curva tensión-deformación:

$$\varepsilon_{max} \cdot \sigma_{max} = \frac{(K_f \cdot S_{max})^2}{E} \quad (22)$$

Nos hace falta obtener el factor de entalla a fatiga (K_f). Puede tomarse el coeficiente geométrico de concentración de tensiones (K_t) del Peterson (ver apartado 2.2.1), mientras que para el coeficiente de sensibilidad a la entalla se utiliza la fórmula:

$$q = \frac{1}{1 + \frac{a}{r}} = \frac{1}{1 + \frac{0'3}{1'5}} = 0'833 \quad (23)$$

$$K_t: \left\{ \begin{array}{l} \frac{r}{d} = 0'027 \\ \frac{D}{d} = 1,18 \end{array} \right\} \rightarrow K_t = 2'3 \quad (24)$$

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 2,08 \quad (25)$$

Por tanto la ecuación 22 queda como:

$$\varepsilon_{max} \cdot \sigma_{max} = \frac{(2,08 \cdot 206'68)^2}{203000} = 0'91039 \quad (26)$$

Por otra parte, se toma la expresión analítica para la curva cíclica (ver apartado 1.7.2.1.3):

$$\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E} + \left(\frac{\sigma_{max}}{K'} \right)^{1/n'} \quad (27)$$

Multiplicando la ecuación 27 por σ_{max} e igualándola a 26 se obtiene:

$$f(\sigma_{max}) = \frac{\sigma_{max}^2}{E} + \frac{(\sigma_{max})^{\frac{1}{n'}+1}}{(K')^{1/n'}} - 0'91039 = 0 \quad (28)$$

Para resolver esta ecuación puede emplearse el método de Newton-Raphson (ver apartado 1.4.2), para lo cual es necesaria la derivada de la función:

$$f'(\sigma_{max}) = \frac{2}{E} \sigma_{max} + \frac{n' + 1}{n' \cdot (K')^{1/n'}} (\sigma_{max})^{1/n'} = 0 \quad (29)$$

Utilizando como solución inicial el valor de S_{max} :

3.4. Determinación de la Teoría más Propicia

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$e = x_{n+1} - x_n $
206'68	-0'12031	0'01634	214'05	7'37
214'05	0'00825	0'01861	213'6	0'45
213'6	319151'88272	0'01847	213'6	0

Tabla 3.1

Debido a que la tensión máxima en la entalla, σ_{max} (213'6 MPa), es superior al límite elástico del material (200 MPa), se recomienda seguir la teoría ϵ -N, ya que existirá deformación plástica en la entalla.

3.5. TEORÍA ε-N

Siguiendo un camino similar al utilizado para calcular la tensión máxima en la entalla, esta vez, para el ciclo de descarga:

$$\Delta \varepsilon \cdot \Delta \sigma = \frac{(K_f \cdot \Delta S)^2}{E} = \frac{[2'08 \cdot (206'68 - (-206'68))]^2}{203000} = 3'64 \quad (30)$$

Por otra parte se toma la relación cíclica tensión-deformación (ver apartado 1.7.2.1.3):

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta \sigma}{E} + 2 \left(\frac{\Delta \sigma}{2 \cdot K'} \right)^{1/n'} \quad (31)$$

Multiplicando la expresión 31 por $\Delta \sigma$ e igualándola a 30:

$$f(\Delta \sigma) = \frac{(\Delta \sigma)^2}{E} + \frac{2}{(2 \cdot K')^{1/n'}} \cdot (\Delta \sigma)^{\frac{1}{n'}+1} - \frac{(K_f \cdot \Delta \varepsilon)^2}{E} = 0 \quad (32)$$

Para resolver esta ecuación puede emplearse el método de Newton-Raphson (ver apartado 1.4.2), para lo cual es necesaria la derivada de la función:

$$f'(\Delta \sigma) = \frac{2}{E} \Delta \sigma + \frac{\frac{2}{n'} + 2}{(2 \cdot K')^{1/n'}} (\Delta \sigma)^{1/n'} = 0 \quad (33)$$

Utilizando como solución inicial el valor de ΔS :

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$e = x_{n+1} - x_n $
413'36	-0'48126	0'03267	428'09	14'73
428'09	0'03299	0'03723	427'2	0'89
427'2	$1'93 \cdot 10^{-9}$	0'03694	427,2	0

Tabla 3.2

Retomando la ecuación 30 y despejando $\Delta \varepsilon$:

$$\Delta \varepsilon = \frac{3'64}{427'2} = 0'00852 \quad (34)$$

Por su parte la deformación alterna será la mitad de la variación:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{0'00852}{2} = \mathbf{0'00426 \text{ mm}} \quad (35)$$

Finalmente, utilizando la expresión analítica de las curvas ε-N puede hallarse el número de ciclos que aguantará la sección estudiada bajo las cargas introducidas y con las características expuestas.

$$f(N_f) = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c - \varepsilon_a = 0 \quad (36)$$

Al igual que ocurría en situaciones anteriores, para resolver esta ecuación emplearemos el método de Newton-Raphson (ver apartado 1.4.2), para lo cual es necesaria la derivada de la función:

$$f'(N_f) = \frac{2 \cdot b \cdot \sigma'_f}{E} (2N_f)^{(b-1)} + 2 \cdot c \cdot \varepsilon'_f (2N_f)^{(c-1)} = 0 \quad (37)$$

Si se utilizase como solución inicial los ciclos proporcionados por la ecuación de la vida de transición (ver apartado 1.7.2.4), el método de Newton-Raphson divergiría, así pues, se tomarán como solución inicial 10 ciclos.

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$e = x_{n+1} - x_n $
10	0'02819	-0'00127	32'23	22'23
32'23	0'01636	-0'00025	98'86	66'63
98'86	0'00922	$-5'1 \cdot 10^{-5}$	279'18	180'32
279'18	0'00492	$-1'2 \cdot 10^{-5}$	689'91	410'73
689'91	0'00238	$-3'4 \cdot 10^{-6}$	1390'1	700'19
1390'1	0'00094	$-1'3 \cdot 10^{-6}$	2125'05	734'95
2125'05	0'00025	$-7'1 \cdot 10^{-7}$	2469'19	344,14
2469'19	$2'43 \cdot 10^{-5}$	$-5'8 \cdot 10^{-7}$	2511'36	42'17
2511'36	$2'84 \cdot 10^{-7}$	$-5'6 \cdot 10^{-7}$	2511'86	0'5
2511'86	$3'94 \cdot 10^{-11}$	$-5'6 \cdot 10^{-7}$	2511'86	0

Tabla 3.3

Así pues, los ciclos que aguantará la solución según la teoría ε-N es:

$$\mathbf{N_f = 2512 \text{ ciclos}} \quad (38)$$

3.6. TEORÍA S-N

A pesar de que el problema ya habría sido resuelto en el apartado anterior, ahora utilizaremos la teoría descartada en principio, ya que el programa proporciona los resultados de ambas teorías, aun cuando lanza un mensaje de cuál escoger.

Lo primero será obtener los puntos significativos de la curva S-N. Para ello, se calcula el límite a fatiga:

$$S_e = K_a \cdot K_b \cdot K_q \cdot K_d \cdot K_e \cdot K_g \cdot K_c \cdot S_e' \quad (39)$$

- Límite a fatiga del material: S_e'

$$S_e' = 0'5 \cdot \sigma_R = 0'5 \cdot 331 = 165'5 \text{ MPa} \quad (40)$$

- Factor de superficie: K_a

Suponiendo un acabado de estirado en frío

$$K_a = a \cdot (\sigma_R)^b = 4'51 \cdot (331)^{-0'265} = 0'97 \quad (41)$$

- Factor de tamaño: K_b

$$K_b = 1'189 \cdot d^{-0'097} = 1'189 \cdot 55^{-0'097} = 0'81 \quad (42)$$

- Factor de carga: K_q

$$\text{Flexión} \rightarrow K_q = 1 \quad (43)$$

- Factor de temperatura: K_d

$$\text{Temperatura ambiente} \rightarrow K_d = 1 \quad (44)$$

- Factor de concentración de tensiones: K_e

$$\frac{1}{K_e} = K_f = 1 + q(K_t - 1) \quad (45)$$

$$K_e = \frac{1}{K_f} = 0'48 \quad (46)$$

- Factor de efectos diversos: K_g

$$K_g = 1 \quad (47)$$

- Factor de confiabilidad: K_c

Para una probabilidad de vida del 90%

$$K_c = 1 - \sigma \cdot D = 1 - 0'08 \cdot 1'3 = 0'896 \quad (48)$$

Así pues, el límite a fatiga será:

$$S_e = 0'97 \cdot 0'81 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0'48 \cdot 1 \cdot 0'896 \cdot 165'5 = 55'92 \text{ MPa} \quad (49)$$

Por el hecho de que el material es un acero, el valor del límite a fatiga calculado corresponde a un millón de ciclos. El valor de la curva S-N para mil ciclos será:

$$S_{1000} = \frac{0'9 \cdot \sigma_R}{K'_f} \quad (50)$$

siendo

$$K'_f = 1 + \left(\frac{0'3 \cdot \sigma_R}{700} - 0'1 \right) \cdot (K_f - 1) = 1'045 \quad (51)$$

Introduciendo el valor recién obtenido en la expresión 50:

$$S_{1000} = \frac{0'9 \cdot 331}{1'045} = 285'07 \text{ MPa} \quad (52)$$

Una vez obtenidos los dos puntos significativos hay que hallar la expresión de la curva que los une:

$$S_a = A \cdot N^m \quad (53)$$

Como se conocen dos puntos de paso de la curva es posible obtener los valores de las constantes A y m:

$$m = \frac{\log\left(\frac{S_1}{S_2}\right)}{\log\left(\frac{N_1}{N_2}\right)} = \frac{\log\left(\frac{285'07}{55'92}\right)}{\log\left(\frac{1000}{1000000}\right)} = -0'2358 \quad (54)$$

$$A = \frac{S_1}{N_1^m} = \frac{285'07}{1000^{-0'2358}} = 1453'29 \quad (55)$$

Así pues, la ecuación de la curva (entre mil y un millón de ciclos) será:

$$S_a = 1453'29 \cdot N^{-0'2358} \quad (53)$$

Por tanto podemos calcular el número de ciclos que corresponderá a la tensión alterna obtenida en la expresión 20.

$$N = \left(\frac{S_a}{1453'29}\right)^{1/-0'2358} = \left(\frac{206'68}{1453'29}\right)^{1/-0'2358} = \mathbf{3910,71 \text{ ciclos}} \quad (54)$$

3.7. RESULTADOS OBTENIDOS CON EL PROGRAMA

3.7.1. Teoría ϵ -N

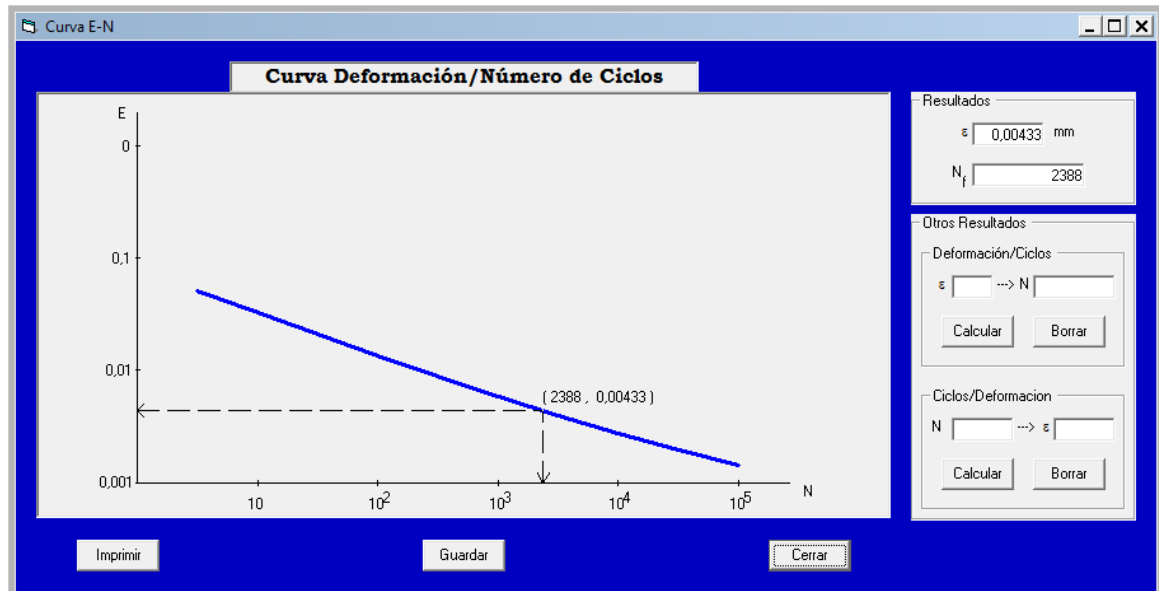


Figura3.7

$$\epsilon_a = 0.00433 \text{ mm} \text{ y } N_f = 2388 \text{ ciclos}$$

3.7.2. Teoría S-N

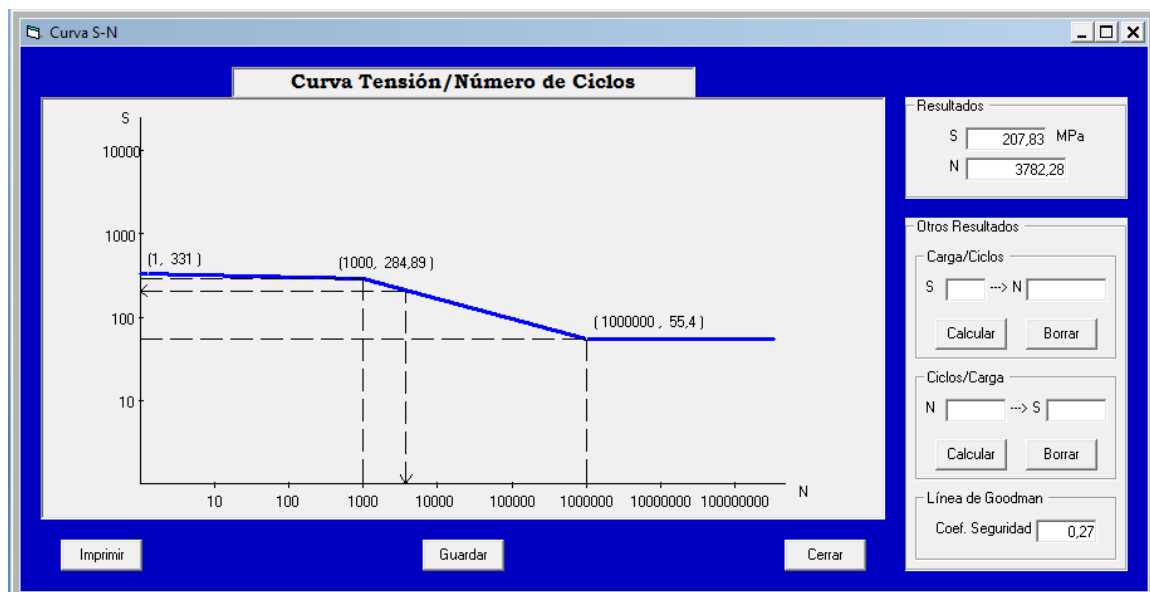


Figura3.8

$$S = 207.83 \text{ MPa} \text{ y } N = 3782 \text{ ciclos}$$

3.8. LISTA DE SÍMBOLOS

a: dimensión característica del material y factor para hallar K_a .
A: coeficiente expresión curvas S-N.

b: exponente de resistencia a fatiga y exponente para hallar K_a .

c: exponente de ductilidad a fatiga.

d: diámetro.

D: factor de multiplicación de la desviación para hallar K_c .

E: módulo de Young o módulo elástico.

F_t : fuerza tangencial.

F_r : fuerza radial.

F_y : fuerzas en el eje Y.

F_z : fuerzas en el eje Z.

K' : coeficiente de resistencia cíclica.

K_a : factor de superficie.

K_b : factor de tamaño.

K_c : factor de confiabilidad.

K_d : factor de temperatura.

K_e : factor de concentración de tensiones.

K_f : factor de entalla a fatiga.

K'_f : valor de K_f a 1000 ciclos.

K_g : factor de efectos diversos.

K_t : coeficiente geométrico de concentración de tensiones.

K_q : factor de carga.

m: exponente expresión curvas S-N.

M_c : momento flector en el punto c.

M_t : momento torsor.

n' : exponente de endurecimiento por deformación cíclica.

N: número de ciclos teoría S-N.

N_f : número de ciclos teoría ϵ -N.

P: potencia.

q: coeficiente de sensibilidad a la entalla.

r: radio.

R_{Ay} : reacción del apoyo A en el plano XY.

R_{Az} : reacción del apoyo A en el plano XZ.

R_{Cy} : reacción del apoyo C en el plano XY.

R_{Cz} : reacción del apoyo C en el plano XZ.

T : tensión.

S : tensión nominal.

S_a : tensión nominal alterna.

S_e : límite a fatiga del eje.

S_e' : límite a fatiga del material

S_m : tensión nominal media.

S_{max} : tensión nominal máxima.

S_{1000} : valor de la tensión a mil ciclos.

α : ángulo de presión.

ϵ_a : deformación producida por carga alterna.

ϵ'_f : coeficiente de ductilidad a fatiga.

ϵ_{max} : deformación máxima en la entalla.

$\Delta\epsilon$: variación de deformación.

$\Delta\sigma$: variación de tensión en la entalla.

ΔS : variación de tensión nominal.

σ : desviación típica.

σ'_f : coeficiente de resistencia a fatiga.

σ_{max} : tensión máxima en la entalla.

σ_R : tensión de rotura.

ω : velocidad angular.

Pamplona, Julio de 2012

Mikel Calvo Fabo